

单孔隙介质渗流问题的统一解

姚 军 李爱芬

(石油大学(华东)石油工程系, 东营 257062)

摘 要 本文应用 Green 函数方法和 Newman 乘积方法给出了单孔隙介质油藏的源函数表达形式的压力通解, 为方便计算给出了两种形式的源函数表达式。借助于褶积积分公式提出了在 Laplace 空间内考虑井筒储存效应和污染效应存在时井底压力的计算方法, 避免了求解复杂内边界条件数学模型的问题。

关键词 单孔隙介质, 不稳定压力, 统一解

分类号 TE312

1 基本原理

地下流体在单孔隙介质渗流时的方程为:

$$\eta_x \frac{\partial^2 P(M, t)}{\partial x^2} + \eta_y \frac{\partial^2 P(M, t)}{\partial y^2} + \eta_z \frac{\partial^2 P(M, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{3.6} \frac{\partial P(M, t)}{\partial t} \quad (1)$$

式中, η_x, η_y, η_z 分别为 x, y, z 三个方向的导压系数。

$$\eta_i = \frac{k_i}{\varphi \mu C_i} \quad i = x, y, z \text{ 或 } r \quad (2)$$

式中, k_i 为渗透率, $10^{-3} \mu\text{m}^2$; φ 为孔隙度; μ 为地下流体的粘度, $\text{mPa} \cdot \text{s}$; C_i 为综合压缩系数, $1/\text{MPa}$ 。

设油藏区域为无限大, 其中源的区域为 D_w (源可以是点、线、面、体), M_w 为源区域上的一个微元, 设源的强度 (单位长度、面积或体积上的流出量或注入量) 均匀分布且为 q , 则由 Green 函数方法求解上述渗流方程的解为:

$$P(M, t) = \frac{1}{\varphi C_i} \int_0^t q(\tau) S(M, t - \tau) d\tau \quad (3)$$

$$S(M, \tau) = \int_{D_w} G(M, M_w, \tau) dM_w \quad (4)$$

式中, G 为源 D_w 在无限大油藏条件下的 Green 函数; $S(M, t)$ 为 Green 函数在源区域上的积分, 称之为源函数。由 (3) 式看出: 求解压力问题转化为求解源函数的问题。

Newman 曾证明^[1] 对于某些初始条件和边界条件, 三维热传导问题的解等于三个一维传

导问题解的乘积。Gringarten^[2]指出:Newman 乘积方法适用于瞬时源函数的求解,可表达为:三维问题中源的源函数等于三个一维问题(或一个一维问题和一个二维问题)中源的源函数的乘积,但分解时应满足下列条件:1)三个一维(或一个一维和一个二维问题)中源的“交”;应为原三维问题中的源;2)三个一维问题(或一个一维问题和一个二维问题)中边界的“交”应为原三维问题中的边界。

由Newman 乘积方法知道任何复杂形状源的源函数可由一些简单(一维)源的源函数相乘得到。因此,只需知道一些简单源的源函数即可。

2 油藏中常见源的源函数

文献[1]中给出油藏中常见源的源函数,但只给出了各种简单源的源函数的一种表达式,为今后计算方便,本文作者给出了这些源的另外一种表达式。详细表达式见表1和表2。表1为无限大油藏中基本源的源函数,表2为有界油藏基本源的源函数。

表1 为无限大油藏中基本源的源函数

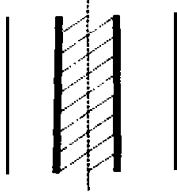
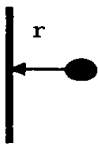
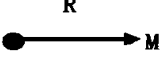
$x=0$ $x=x_w$ x	源	序号	源函数
	无限大平面源	I (x)	$\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta_x t}} \exp\left[-\frac{(x-x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$
	无限大板源	II (x)	$\frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{\frac{x_f}{2} + (x-x_w)}{2\sqrt{\eta_x t}} + \operatorname{erf} \frac{\frac{x_f}{2} - (x-x_w)}{2\sqrt{\eta_x t}} \right]$
	无限长线源	III (x)	$\frac{1}{4\pi\eta_x t} \exp\left[-\frac{r^2}{4\eta_x t}\right]$ $r^2 = (x-x_w)^2 + (y-y_w)^2$
	点源	V (x)	$\frac{1}{4\pi\eta_x t} \exp\left[-\frac{r^2}{4\eta_x t}\right]$ $r^2 = (x-x_w)^2 + (y-y_w)^2 + (z-z_w)^2$

表 2 有界油藏基本源的瞬时源函数

源 函 数		表 达 式 I		表 达 式 II	
序号	边界条件 源	序 号	边界条件 源	序 号	边界条件 源
VII(x)	封闭边界 无限大平面源				
		$\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta_x t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{(x+2nx_e-x_w)^2}{4\eta_x t}\right\} \exp\left[\frac{(x+2nx_e+x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$			
VIII(x)	定压边界 无限大平面源				
		$\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta_x t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{(x+2nx_e-x_w)^2}{4\eta_x t}\right\} \exp\left[\frac{(x+2nx_e+x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$			
IX(x)	混合边界 无限大平面源				
		$\frac{1}{2\sqrt{\pi\eta_x t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{\frac{(x+2nx_e-x_w)^2}{4\eta_x t}\right\} \exp\left[\frac{(x+2nx_e+x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$			
X(x)	封闭边界 无限大平板源				
		$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{x_w+x_f/2-x-2nx_e}{2\sqrt{\eta_x t}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_w-x_f/2-x-2nx_e}{2\sqrt{\eta_x t}}\right] \right\} \exp\left[\frac{(x+2nx_e+x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$			
XI(x)	定压边界 无限大平板源				
		$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{x_w+x_f/2-x-2nx_e}{2\sqrt{\eta_x t}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_w-x_f/2-x-2nx_e}{2\sqrt{\eta_x t}}\right] \right\} \exp\left[\frac{(x+2nx_e+x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$			
XII(x)	混合边界 无限大平板源				
		$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{x_w+x_f/2-x-2nx_e}{2\sqrt{\eta_x t}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_w-x_f/2-x-2nx_e}{2\sqrt{\eta_x t}}\right] \right\} \exp\left[\frac{(x+2nx_e+x_w)^2}{4\eta_x t}\right]$			

表3 各类垂直井压力解

油藏/井类型	无因次参数	压力解表达式	源函数表达式①	源函数表达式②	源函数①②的使用条件
无限大板状油藏一口垂直井	$r_s = \frac{r}{r_o}$ $P_s = \frac{2\pi kh\Delta P}{q\mu} \frac{kt}{\phi\mu C_r r^2}$ $l_D = \frac{h}{\phi\mu C_r r^2}$	$P_D = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_D} S_D(r_D, \tau_D) d\tau_D$ $S_D(r_D, \tau_D) = \text{III}(r_D, \tau_D)$	$\frac{1}{4\pi\eta\tau_o} \exp(-\frac{r_D^2}{4\tau_o})$		
矩形封闭边界内一口垂直井	$x_D = \frac{x}{x_o}, y_D = \frac{y}{y_o}$ $z_D = \frac{z}{h_D}, y_{oD} = \frac{y_o}{h}$ $P_D = \frac{2\pi kh\Delta P}{q\mu} \frac{kt}{\phi\mu C_r r^2}$ $l_D = \frac{h}{\phi\mu C_r r^2}$	$P_D = 2\pi \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = \text{VII}(x_D, \tau_D) * \text{VII}(y_D, \tau_D)$ (1) (2)	$\frac{1}{x_o} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_o}{x_o^2}) \cos(\frac{n\pi x_D}{x_o}) \right] \cos(\frac{n\pi x_o}{x_o})$ (1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_o}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x_D + 2n x_o - x_o)^2}{4\tau_o}\right] + \exp\left[-\frac{(x_D + 2n x_o + x_o)^2}{4\tau_o}\right] \right\}$ (2)	$\frac{1}{y_o} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_o}{y_o^2}) \cos(\frac{n\pi y_D}{y_o}) \cos(\frac{n\pi y_o}{y_o}) \right]$ (1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_o}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y_D + 2n y_o - y_o)^2}{4\tau_o}\right] + \exp\left[-\frac{(y_D + 2n y_o + y_o)^2}{4\tau_o}\right] \right\}$ (2)	①: $\tau_D \geq \frac{x_o^2}{\pi^2}$ ②: $\tau_D \geq \frac{y_o^2}{\pi^2}$
矩形混合边界内一口垂直井	$x_D = \frac{x}{x_o}, y_D = \frac{y}{y_o}$ $z_D = \frac{z}{h_D}, y_{oD} = \frac{y_o}{h}$ $P_D = \frac{2\pi kh\Delta P}{q\mu} \frac{kt}{\phi\mu C_r r^2}$ $l_D = \frac{h}{\phi\mu C_r r^2}$	$P_D = 2\pi \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = \text{IX}(x_D, \tau_D) * \text{VII}(y_D, \tau_D)$ (1) (2)	$\frac{2}{x_o} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \tau_D}{4x_o^2}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x_D}{x_o}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x_o}{x_o}\right] \right\}$ (1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x_D + 2n x_o - x_o)^2}{4\tau_D}\right] + \exp\left[-\frac{(x_D + 2n x_o + x_o)^2}{4\tau_D}\right] \right\}$ (2) $-\exp\left[-\frac{((4n+2)x_D + x_o - x_o)^2}{4\tau_D}\right] - \exp\left[-\frac{((4n+2)x_D - x_o - x_o)^2}{4\tau_D}\right]$ (2)	$\frac{1}{y_o} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{y_o^2}) \cos(\frac{n\pi y_D}{y_o}) \cos(\frac{n\pi y_o}{y_o}) \right]$ (1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y_D + 2n y_o - y_o)^2}{4\tau_D}\right] + \exp\left[-\frac{(y_D + 2n y_o + y_o)^2}{4\tau_D}\right] \right\}$ (2)	①: $\tau_D \geq \frac{4x_o^2}{3\pi^2}$ ②: $\tau_D \geq \frac{y_o^2}{\pi^2}$
矩形两条封闭边界内一口垂直井	$x_D = \frac{x}{x_o}, y_D = \frac{y}{y_o}$ $z_D = \frac{z}{h_D}, y_{oD} = \frac{y_o}{h}$ $P_D = \frac{2\pi kh\Delta P}{q\mu} \frac{kt}{\phi\mu C_r r^2}$ $l_D = \frac{h}{\phi\mu C_r r^2}$	$P_D = 2\pi \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = \text{VII}(x_D, \tau_D) * \text{VII}(y_D, \tau_D)$ (1) (2)	$\frac{2}{x_o} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{x_o^2}) \cos(\frac{n\pi x_D}{x_o}) \cos(\frac{n\pi x_o}{x_o})$ (1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x_D + 2n x_o - x_o)^2}{4\tau_D}\right] - \exp\left[-\frac{(x_D + 2n x_o + x_o)^2}{4\tau_D}\right] \right\}$ (2)	$\frac{1}{y_o} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{y_o^2}) \cos(\frac{n\pi y_D}{y_o}) \cos(\frac{n\pi y_o}{y_o}) \right]$ (1) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau_D}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y_D + 2n y_o - y_o)^2}{4\tau_D}\right] + \exp\left[-\frac{(y_D + 2n y_o + y_o)^2}{4\tau_D}\right] \right\}$ (2)	①: $\tau_D \geq \frac{x_o^2}{\pi^2}$ ②: $\tau_D \geq \frac{y_o^2}{\pi^2}$

表 3 各类垂直井压力解(续)

矩形封闭边界	$x_0 = \frac{z}{x_0}, y_0 = \frac{y}{y_0}$ $z_0 = \frac{z}{x_0}, y_0 = \frac{y}{y_0}$ $P_0 = \frac{2\pi h}{\mu C_p} \frac{q}{h}$ $t_0 = \frac{t}{h^2}$ $x_D = \frac{x}{h}$	$P_D = -\frac{2\pi}{x_D} \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = X(x_0, \tau_0) * VII(y_0, \tau_0)$ $(1) \quad (2)$	$\frac{x_D}{x_0} \left[1 + \frac{4x_D}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{x_0^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_D}{x_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_0}{x_0}\right) \right] (1)$ $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 + x_D/2 - x_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 - x_D/2 - x_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\} (2)$ $+ \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 + x_D/2 + x_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 - x_D/2 + x_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\}$	$\frac{1}{y_0} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_0}{y_0^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_0}{y_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_0}{y_0}\right) \right] (1)$ $\frac{1}{2\sqrt{\pi \tau_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y_0 + 2n\tau_0 - y_0)^2}{4\tau_0}\right] + \exp\left[-\frac{(y_0 - 2n\tau_0 - y_0)^2}{4\tau_0}\right] \right\} (2)$	①: $\tau_0 \geq \frac{x_0^2}{\pi^2}$ ②: $\tau_0 \geq \frac{y_0^2}{\pi^2}$
矩形封闭边界	$x_0 = \frac{z}{x_0}, y_0 = \frac{y}{y_0}$ $z_0 = \frac{z}{x_0}, y_0 = \frac{y}{y_0}$ $P_0 = \frac{2\pi h}{\mu C_p} \frac{q}{h}$ $t_0 = \frac{t}{h^2}$ $x_D = \frac{x}{h}$	$P_D = -\frac{2\pi}{x_D} \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = X(x_0, \tau_0) * X(y_0, \tau_0)$ $(1) \quad (2)$	$\frac{x_D}{x_0} \left[1 + \frac{4x_D}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{x_0^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_D}{x_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_0}{x_0}\right) \right] (1)$ $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 + x_D/2 - x_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 - x_D/2 - x_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\} (2)$ $+ \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 + x_D/2 + x_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 - x_D/2 + x_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\}$	$\frac{y_D}{y_0} \left[1 + \frac{4y_D}{y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{y_0^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_D}{y_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi y_0}{y_0}\right) \right] (1)$ $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{y_0 + y_D/2 - y_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{y_0 - y_D/2 - y_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\} (2)$ $+ \operatorname{erf}\left[\frac{y_0 + y_D/2 + y_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{y_0 - y_D/2 + y_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\}$	①: $\tau_0 \geq \frac{x_0^2}{\pi^2}$ ②: $\tau_0 \geq \frac{y_0^2}{\pi^2}$
无限大板状油藏一口部分射开垂直井	$x_0 = \frac{z}{x_0}$ $z_0 = \frac{z}{x_0}$ $P_0 = \frac{2\pi h}{\mu C_p} \frac{q}{h}$ $t_0 = \frac{t}{h^2}$ $x_D = \frac{x}{h}$	$P_D = \frac{2\pi}{h_D} \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = X(z_0, \tau_0) * III(\tau_0, \tau_0)$ $(1) \quad (2)$	$\frac{x_D}{x_0} \left[1 + \frac{4x_D}{x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{x_0^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_D}{x_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_0}{x_0}\right) \right] (1)$ $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 + x_D/2 - x_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] + \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 - x_D/2 - x_0 - 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\} (2)$ $+ \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 + x_D/2 + x_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] - \operatorname{erf}\left[\frac{x_0 - x_D/2 + x_0 + 2n\tau_0}{2\sqrt{\tau_0}} \right] \right\}$	$\frac{a}{4\pi \tau_D} \exp\left(-\frac{r_D^2}{4\pi \tau_D}\right)$	①: $\tau_0 \geq \frac{x_0^2}{\pi^2}$
无限大板状油藏具有水平缝垂直井	$x_0 = \frac{z}{x_0}, y_0 = \frac{y}{y_0}$ $z_0 = \frac{z}{x_0}, y_0 = \frac{y}{y_0}$ $P_0 = \frac{2\pi h}{\mu C_p} \frac{q}{h}$ $t_0 = \frac{t}{h^2}$ $x_D = \frac{x}{h}$	$P_D = \frac{2}{r_D^2} \int_0^{t_D} S_D d\tau_D$ $S_D = VII(z_0, \tau_0) * V(\tau_0, \tau_0)$ $(1) \quad (2)$	$\frac{x_D}{x_0} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \tau_D}{x_0^2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_D}{x_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_0}{x_0}\right) \right] (1)$ $\frac{1}{2\sqrt{\pi \tau_0}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(z_0 + 2n - z_0)^2}{4\tau_0}\right] + \exp\left[-\frac{(z_0 - 2n - z_0)^2}{4\tau_0}\right] \right\} (2)$	$\exp\left(-\frac{r_D^2}{4\pi \tau_D}\right) \frac{r_D^2}{4\pi \tau_D} \ln\left(\frac{r_D}{4\pi \tau_D}\right) \exp\left(-\frac{r_D^2}{4\pi \tau_D}\right) r_D dr_D$	①: $\tau_0 \geq \frac{x_0^2}{\pi^2}$

3 油井以定产量生产时的压力求解方法

应用上面的基本函数推导了油藏工程中垂直井和水平井以定产量生产时的压力解, 见表 3 和表 4。为讨论问题方便采用无因次形式表示。

表 4 水平井压力解

矩形油藏 /水平井	内容
无因次 参数	$x_D = \frac{x}{L} \quad y_D = \frac{y}{L} \quad z_D = \frac{z}{h} \quad L_D = \frac{L}{h} \sqrt{\frac{k_z}{k_r}} \quad P_D = \frac{2\pi k_r h}{qu} \frac{P}{P_i} \quad t_D = \frac{4k_r t}{\phi \mu C L^2} \quad k_r = \sqrt{k_x k_y}$
压力解 表达式	$P_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = \int_0^{t_D} S_D(x_D, y_D, z_D, \tau) d\tau$ $S_D(x_D, y_D, z_D, \tau) = X(x_D, \tau) \times VII(y_D, \tau) \times VII(z_D, \tau)$
$X(x_D, \tau)$	$\frac{2}{x_D} [1 + \frac{2x_D}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau}{x_D^2}) \sin(\frac{n\pi}{x_D}) \cos(\frac{n\pi x_D}{x_D}) \cos(\frac{n\pi x_{wD}}{x_D})]$ (1)
	$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \{ \operatorname{erf}[\frac{x_{wD} + 1 + x_D + 2nx_D}{2\sqrt{\tau}}] - \operatorname{erf}[\frac{x_{wD} - 1 - x_D - 2nx_D}{2\sqrt{\tau}}] + \operatorname{erf}[\frac{x_{wD} + 1 + x_D + 2nx_D}{2\sqrt{\tau}}] - \operatorname{erf}[\frac{x_{wD} - 1 - x_D + 2nx_D}{2\sqrt{\tau}}] \}$ (2)
$VII(y_D, \tau)$	$\frac{1}{y_D} [1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\frac{n^2 \pi^2 \tau}{y_D^2}) \cos(\frac{n\pi y_D}{y_D}) \cos(\frac{n\pi y_{wD}}{y_D})]$ (1)
	$\frac{1}{2\sqrt{\pi \tau}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \{ \exp[-\frac{(y_D + 2ny_D - y_{wD})^2}{4\tau}] + \exp[-\frac{(y_D + 2ny_D + y_{wD})^2}{4\tau}] \}$ (2)
$VII(z_D, \tau)$	$[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-n^2 \pi^2 L_D^2 \tau) \cos(n\pi z_D) \cos(n\pi z_{wD})]$ (1)
	$\frac{1}{2\sqrt{\pi L_D^2 \tau}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \{ \exp[-\frac{(z_D + 2n - z_{wD})^2}{4L_D^2 \tau}] + \exp[-\frac{(z_D + 2n + z_{wD})^2}{4L_D^2 \tau}] \}$ (2)
(1) 转换到 (2) 的条件	$\tau \geq \frac{x_D^2}{\pi^2} \quad \tau \geq \frac{y_D^2}{\pi^2} \quad \tau \geq \frac{1}{\pi^2 L_D^2}$

4 压力解的快速计算方法

由表 3 和表 4 看出垂直井或水平井的源函数由两个或三个简单源的源函数相乘得到。计算无因次压力的快慢, 在很大程度上取决于这些无穷级数的收敛特性。数值积分采用八点 Gauss-legenede 方法。表 3 和表 4 中给出了源函数的两种表达式, 在所有表达式的 (1) 式中, 时间变量 τ 在负幂指数项的分子中, 也就是说时间 τ 越大, 幂值越小, 则级数收敛越快; 而所有表达式的 (2) 式中, 时间变量 τ 在负幂指数项的分母中, 也就是说时间 τ 越小, 幂值越小, 级数收敛越快。这样, 计算被积函数时, 当时间较大时采用 (1) 式, 而时间较小时采用 (2) 式进行计算, 始终保持级数快速收敛, 其转换条件见表 3、4 中。这种交替代换的方法可大幅度地提高压力结的计算速度。

通过计算可得到定产量生产时任一点的无因次压力为 $\{\tau_i, P_{Di}\}_n$ 。

5 考虑井筒储存效应时和井底污染效应时的井底压力为计算方法

试井分析时计算的无因次井底压力需考虑井筒储存和污染的影响。为此提出了下列方法: 设变产量 $q_D(\tau)$ 下的井底压力为 $P_{wD}(\tau)$, 由褶积积分公式得:

$$P_{wD} = \int_0^t q_D(\tau) \left[\frac{\partial P_D(t-\tau)}{\partial \tau} + S \right] d\tau \quad (5)$$

式中, P_D 为产量为常数情况下的无因次井底压力; $q_D(\tau)$ 为无因次井底流量, $q_D = q(t)/q_{ref}$; q_{ref} 为参考流量; S 为污染系数。

由无因次井筒储存系数 C_D 来表示变产量 $q_D(\tau)$, 则有:

$$q_D(\tau) = 1 - C_D \frac{dP_{wD}}{d\tau} \quad (6)$$

式中, $C_D = C/(2\pi\phi h r_w^2)$ (垂直井)

$C_D = C/(\pi\phi h L^2)$ (水平井, L 为水平井的长度)

C 为井筒储存系数, m^3/MPa ;

对 (5) 式和 (6) 式进行 Laplace 变换, 则有:

$$\bar{P}_{wD}(Z) = Z \cdot \bar{q}_D(Z) \cdot \bar{P}_D(Z) + S/Z \quad (7)$$

$$\bar{q}_D(Z) = 1/Z - C_D Z \bar{P}_{wD}(Z) \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (7) 式, 整理得:

$$\bar{P}_{wD}(Z) = \frac{Z \bar{P}_D(Z) + S}{Z \{1 + C_D Z [Z \bar{P}_D(Z) + S]\}} \quad (9)$$

式中, $\bar{P}_{wD}(Z) = \int_0^\infty \bar{P}_{wD} e^{-Z\tau} d\tau$; $\bar{q}_D(Z) = \int_0^\infty q_D e^{-Z\tau} d\tau$; $\bar{P}_D(Z) = \int_0^\infty P_D e^{-Z\tau} d\tau$ 。

考虑井筒储存系数和污染系数时的无因次井底压力的计算方法为:

1) 将 $\{\tau_i, P_{Di}\}_n$ 进行 Laplace 数值变换^[3], 计算公式为:

$$\bar{P}_D = \frac{1}{Z^2} [P'_{D1}(1 - e^{-Z\tau_1}) + \sum_{i=1}^{n-1} P'_{Di}(e^{-Z\tau_{i-1}} - e^{-Z\tau_i}) + P'_{Dn} e^{-Z\tau_n}] \quad (10)$$

式中, $P'_{Di} = (P_{Di} - P_{Di-1})/(\tau_i - \tau_{i-1})$

2) 将计算的 $\bar{P}_D(Z)$ 代入 (9) 式, 即得到考虑井筒储存和污染影响时的 Laplace 空间内的无因次井底压力 $\bar{P}_{wD}(Z)$;

3) 采用 Stehfest^[4] 数值 Laplace 反演方法把 $\bar{P}_{wD}(Z)$ 反演到真实空间, 则得到一组考

虑井筒储存和污染时的无因次井底压力为 $\{b_{i}, P_{wD}(b_{i})\}_{i}$ 。

值得注意的是进行 Laplace 数值变换时在时间范围的两端运用 (10) 式会带来很大的误差, 为避免这一问题一般在时间范围的两端分别多加一个时间对数周期, 这样上述误差都出现在需要的时间范围之外。

这一方法避免了解复杂内边界条件的数学模型, 这一点对于水平井来讲非常重要, 因为对于水平井来讲, 根本无法求解井筒储存和污染存在时复杂内边界条件的渗流数学模型。

6 结论

- (1) 本文给出了用源函数表示的单孔隙介质中各类型井的压力通解, 为计算每一种源函数给出了两种形式表达式;
- (2) 给出了这些通解的快速计算方法——交换替代法;
- (3) 采用褶积积分和 Laplace 数值变换及数值反演技术提出了井筒储存效应和污染效应存在时的井底压力的计算方法, 避免了求解复杂内边界条件数学模型的问题;
- (4) 这些压力解可用于单孔隙介质中各种类型井的试井分析。

参 考 文 献

- 1 H S Carslaw, J C Jaeger. Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, 1959
- 2 A C Gringarten, J H Ramey. The Use of Source and Green's Function in Solving Unsteady-flow Problem in Reservoir, SPEJ, Oct., 1973
- 3 A Rouboutsos and G Stewart. A Direct Deconvolution or Convolution Algorithm for Well Analysis, SPE 18157.
- 4 H Stehfest. Numerical Inversion of Laplace Transformations, Communication of ACM, Jan. 1970, 13(1): 47-49

作者简介

姚 军, 男, 1964 年 3 月出生, 副教授, 硕士。
李爱芬, 女, 1962 年 10 月出生, 副教授, 硕士。

General Solutions for Seepage Flow in Single Porous Medium

Yao Jun Li Aifen

(Department of Oil Engineering, University of Petroleum,
Dongying, Shandong 257062)

Abstract General solutions for the seepage flow in single porous medium in vertical and horizontal well are presented by Green's Function and Newman Product method. For the sake of quick calculation, two expressions of source functions are provided. With the convolution and the Laplace numerical transformation and its numerical inverse, the method of calculating sandface pressure is given, which avoids solving mathematical problems with complicated inner condition. Calculating results obtained by this method are compared with those given by conventional methods which show this method is valid and convenient for vertical and horizontal well seepage in single porous medium.

Key words single porous medium, nonstationary pressure, general solution