

DOI: 10.3969/j.issn.1000-4874.2010-01.001

## 裂缝性油藏等效渗透率张量计算 及表征单元体积研究\*

李亚军, 姚军, 黄朝琴, 张凯

(中国石油大学(华东)石油工程学院, 山东青岛 266555,  
Email: yajunok@126.com)

**摘要:** 给出了利用等效渗透率张量来确定裂缝性油藏表征单元体积的方法。根据裂缝系统属性参数的统计资料, 利用裂缝网络模拟技术建立了离散裂缝网络模型。建立了求解裂缝性油藏等效渗透率张量的数学模型, 并给出了边界元求解方法。在此基础上, 提出裂缝性油藏表征单元体积的确定方法, 分析了裂缝实际分布及其属性参数对研究区域渗透特性和表征单元体积的影响。研究结果为裂缝性油藏渗流分析的参数确定提供了理论依据。

**关键词:** 裂缝性油藏; 离散裂缝网络; 等效连续介质; 渗透率张量; 表征单元体积; 边界元方法

**中图分类号:** TE344

**文献标识符:** A

## Calculation of equivalent permeability tensor and study on representative element volume for modeling fractured reservoirs

LI Ya-jun, YAO Jun, HUANG Zhao-qin, ZHANG Kai

(College of Petroleum Engineering, China University of Petroleum(East China),  
Qingdao 266555, China)

**Abstract:** The methodology is presented to predict the representative element volume (REV) of fractured reservoirs by calculating equivalent permeability tensors (EPT) in this paper. Based on the technology of fractured network simulation, discrete fracture networks of fractured reservoirs were realized using fracture statistics data. The mathematical model

\* 收稿日期: 2009-01-16(2009-08-26 修改稿)

基金项目: 国家 973 计划(2006CB202404), 教育部 111 计划“油气田开发工程创新引智创新引智基地”项目资助

作者简介: 李亚军(1984—), 男, 山东临沂人, 博士研究生。

was established for calculating EPT with the boundary element method. The estimation method was presented to determine REV size of fractured reservoir. The influence of fracture properties and distribution on the permeability characteristic and REV size was analyzed. The result provides theoretical evidence to determine the parameters when analyzing the flow in fractured reservoirs.

**Key words:** fractured reservoirs; discrete fracture network; equivalent continuum; permeability tensor; representative element volume; boundary element method

## 1 引言

目前, 裂缝性油藏数学模型主要包括双重介质模型<sup>[1]</sup>、离散裂缝模型<sup>[2]</sup>和等效连续介质模型。离散裂缝模型能够描述地下裂缝系统的真实性, 连续介质模型能够宏观地描述地下流动的复杂性, 等效连续介质模型则结合了两者的优点, 具有广泛的研究前景。应用等效连续介质模型进行裂缝性油藏渗流分析时, 裂缝性多孔介质的等效渗透率张量和表征单元体积REV (Representative Element Volume) 的确定是关键, 其中等效渗透率张量用来表征裂缝性多孔介质的非均质性和各向异性, REV是衡量研究区域是否可以等效为连续介质的重要标准<sup>[3]</sup>, 也是在数值计算中对研究区域进行网格剖分的尺度依据。

渗透率张量理论是二十世纪60年代由美国学者Snow<sup>[4]</sup>提出, 用来解决含水裂缝介质渗透各向异性问题。由于该方法不考虑实际裂缝的连通情况及空间分布情况, 在确定裂缝岩体的相关参数时存在较大的局限性。近年来许多学者<sup>[5-8]</sup>对裂缝岩体的渗透参数及REV进行了深入研究, 对裂缝岩体网络模型的建立、渗透率张量的计算和REV尺寸的确定等方面取得了更加深刻的认识。但由于上述研究均没有考虑基质岩块的渗透性, 因此在裂缝性油藏开发领域的应用方面存在困难。郭大立等<sup>[9]</sup>采用数值计算和实验相结合的方法研究了均质各向异性介质的渗透率张量求解方法, 该方法没有考虑裂缝对渗透参数的影响。Gitmana等人<sup>[10]</sup>利用有限元方法对弹性材料、塑性材料和非均质材料的REV的存在性和确定方法进行了研究。Li等人<sup>[11]</sup>利用有限元方法对含有两组相交裂缝的层状材料的REV进行了细致研究和分析, 该方法仅考虑了裂缝对REV的影响。

本文根据裂缝统计资料, 利用裂缝网络模拟技术建立裂缝性油藏离散裂缝网络模型; 根据流量等效原理, 建立求解裂缝性油藏等效渗透率张量的数学模型, 并利用边界元方法求解模型; 在此基础上, 提出利用等效渗透率张量确定裂缝性油藏表征单元体积的方法并进行了参数分析。

## 2 裂缝性油藏离散裂缝网络模型建立方法

### 2.1 基本假设

实际储层中的裂缝分布极为复杂, 要研究流体在其中的渗流规律, 必须对裂缝系统进行简化<sup>[12-13]</sup>。本研究假设: (1) 裂缝性油藏为水平地层, 裂缝为垂直于水平面且具有一定厚度的矩形面, 裂缝的纵向切深等于所研究区域的厚度。此时油藏可视为二维油藏, 裂缝等价于二维空间中的线形裂缝。(2) 裂缝内的渗流符合立方定律。(3) 忽略重力影响。

### 2.2 裂缝属性参数及其统计学特征

如图1所示, 在二维空间, 裂缝由中点 $O$ 、方位角 $\theta$ 、长度 $L$ 及开度 $h$ 确定。根据裂缝属性参数的地质学统计分析研究, 假设裂缝中心位置服从均匀分布, 裂缝长度服从指数分布, 方位角服从正态分布。根据每种裂缝属性参数的代表性统计特征, 由裂缝网络模拟程序就可以得到相应的裂缝性油藏离散裂缝网络模型。

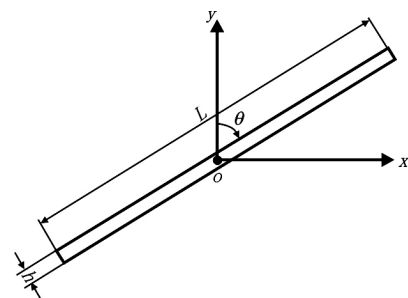


图1 二维裂缝示意图

### 2.3 建立步骤

(1) 结合统计学、地质统计学等技术, 确定裂缝属性参数的统计特征; (2) 以裂缝属性参数的统计分布为基础进行裂缝属性参数的模拟, 把裂缝密度整合到模型中, 解决裂缝空间分布的复杂性问

题; (3) 如果研究区域内存在大裂缝, 直接输入裂缝的起止坐标。通过随机抽样就得到裂缝性油藏的一个具体实现。

### 3 等效渗透率张量计算原理及数学模型

针对裂缝性油藏的特点, 将油藏分解为基质岩块系统和裂缝系统, 其中裂缝系统嵌套于基质岩块中, 其概念模型如图 2 (a) 所示。基质岩块为长度为  $l$  的正方形区域,  $K_m$  和  $K_{fi}$  分别表示基岩和第  $i$  条裂缝的渗透率。正方形网格块的边界称为外边界, 基岩和裂缝的交界面称为内边界。

#### 3.1 等效渗透率张量计算原理

在相同的压力梯度和外边界条件下, 若同种流体分别通过相同尺寸的裂缝性多孔介质体 (图 2 (a)) 和均质各向异性介质体 (图 2 (b)) 的流量相等, 则裂缝性多孔介质体可由均质各向异性介质体等效替代, 裂缝性多孔介质体的整体渗透率可由均质各向异性介质体的渗透率表示, 此即为流量等效原理。

均质各向异性介质体的渗透率具有二阶张量形式, 故裂缝性多孔介质体的整体渗透率也为张量, 称为等效渗透率张量, 用  $\mathbf{K}$  表示。裂缝性多孔介质的等效渗透率张量综合考虑基岩和每条裂缝的空间分布和属性参数对渗透性的影响, 是表征岩石的非均质性和各向异性的重要参数, 它可表示为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

根据广义达西定律, 流体通过等效的均质各向异性介质体的渗流速度  $\mathbf{v}$  与压力梯度  $\nabla P$  的关系为

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla P \quad (2)$$

其中,  $\mu$  为流体粘度,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$  为渗流速度,

$\nabla P = (\partial_x P, \partial_y P)^T$  为压力梯度。

若已知相同条件下裂缝性多孔介质体的外边界平均流速  $\bar{\mathbf{v}}$  的分量为

$$\bar{v}_x = \frac{1}{l} \left| \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 dy \right| \quad (3)$$

$$\bar{v}_y = \frac{1}{l} \left| \int_{\Gamma_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3 dx \right| \quad (4)$$

根据流量等效原理和公式(2), 有

$$\bar{v}_x = -\frac{1}{\mu} (K_{xx} \partial_x P + K_{xy} \partial_y P) \quad (5)$$

$$\bar{v}_y = -\frac{1}{\mu} (K_{yx} \partial_x P + K_{yy} \partial_y P) \quad (6)$$

若对网格块施加单位压力梯度  $\nabla P = (1, 0)^T$ , 则可求得  $\mathbf{K}$  的第一列分量  $K_{xx}$  和  $K_{yx}$ 。同理, 当压力梯度  $\nabla P = (0, 1)^T$  时, 可求出  $\mathbf{K}$  的其它两个元素。

#### 3.2 数学模型

对含有离散裂缝的基岩网格块, 分别建立流体在基岩和每条裂缝内的流动方程, 给出网格块的内外边界条件, 组成求解裂缝性多孔介质外边界平均流速的数学模型, 进而求得裂缝性介质的等效渗透率张量。

假设单位流体粘度和密度的流体在基岩和裂缝中的渗流为单相稳定流动, 满足达西方程和质量守恒方程, 则描述基岩和网格块中第  $i$  条裂缝的连续性方程分别为

$$\begin{cases} K_m \frac{\partial^2 P_m}{\partial x^2} + K_m \frac{\partial^2 P_m}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^N Q_i = 0 \\ K_{fi} \frac{\partial^2 P_{fi}}{\partial \xi_i^2} + K_{fi} \frac{\partial^2 P_{fi}}{\partial \eta_i^2} - Q_i = 0 \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\xi_i$  和  $\eta_i$  表示第  $i$  条裂缝所在的局部坐标,  $N$  表示基岩块中的裂缝条数,  $P_m$  和  $P_{fi}$  分别表示基岩和第  $i$  条裂缝的压力,  $Q_i$  表示第  $i$  条裂缝与其周围基岩之间的流体交换量。

边界条件对于求解渗透率张量非常重要, 采用周期边界条件可以保证得到符合物理意义的渗透率张量<sup>[14]</sup>。如图 2 (a) 中所示,  $\Gamma_i$ 、 $\mathbf{n}_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 分别为网格块外边界及相应的单位外法向量。该网格块的周期边界条件<sup>[14]</sup>表示为

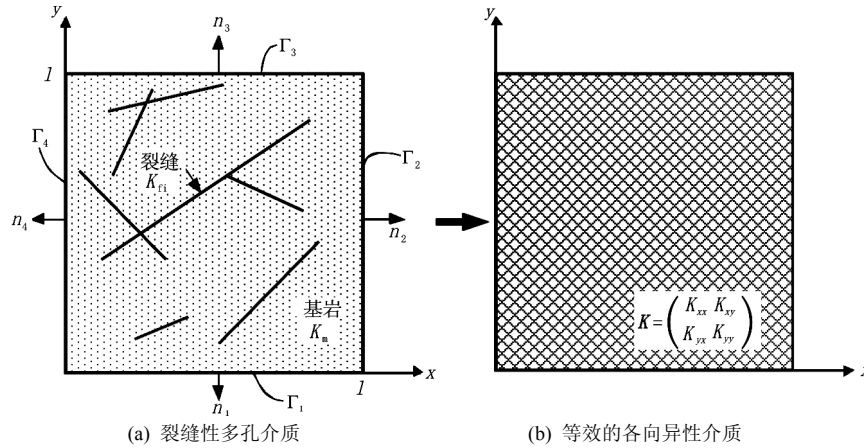


图2 裂隙性多孔介质等效示意图

$$\begin{cases} P(x, y=0) = P(x, y=l) - \partial_y P & \Gamma_1, \Gamma_3 \\ \mathbf{v}(x, y=0) \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{v}(x, y=l) \cdot \mathbf{n}_3 & \Gamma_1, \Gamma_3 \\ P(x=0, y) = P(x=l, y) - \partial_x P & \Gamma_2, \Gamma_4 \\ \mathbf{v}(x=0, y) \cdot \mathbf{n}_2 = -\mathbf{v}(x=l, y) \cdot \mathbf{n}_4 & \Gamma_2, \Gamma_4 \end{cases} \quad (8)$$

在第*i*条裂隙与基岩接触面处，利用 $P_{mi}$ 、 $P_{fi}$ 、 $\mathbf{v}_{mi}$ 和 $\mathbf{v}_{fi}$ 表示基岩和裂隙的压力和渗流速度，裂隙两相对壁面的渗流速度分别记为 $\mathbf{v}_{mi}^+$ 和 $\mathbf{v}_{mi}^-$ ， $\mathbf{n}$ 表示接触面的单位外法向量， $dS$ 表示接触面微单元。接触面上压力和法向速度保持相等，因此裂隙与基岩的接触面处的边界条件（即内边界条件）为

$$P_{fi} = P_{mi} \quad (9)$$

$$\mathbf{v}_{fi} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_{mi} \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

$$Q_i = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{v}_{mi}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_{mi}^- \cdot \mathbf{n}) dS \quad (11)$$

### 3.3 数学模型的边界元解法

由于计算网格内含有大量裂隙，即求解区域存在大量内部边界，而边界元方法<sup>[15]</sup>只对边界进行离散，使问题的维数降低一维，从而极大地降低了计算成本，提高了计算精度。

基岩和裂隙渗流方程本质上是泊松方程

$$K \nabla^2 P = Q \quad (12)$$

利用第二格林公式和 $\delta$ 函数的性质，通过极限过程推导出研究区域边界上任意点的边界积分方程：

$$c^i P^i + \int_{\Gamma} v^* P d\Gamma = \int_{\Gamma} v P^* d\Gamma + \int_{\Omega} Q P^* d\Omega \quad (13)$$

其中， $c^i = \frac{\alpha}{2\pi}$ ， $\alpha$ 指由边界点*i*向两侧所作切线围成的立体角，当点*i*是光滑点时 $\alpha = \pi$ ，此时 $c^i = \frac{1}{2}$ 。 $P^*$ 是拉普拉斯方程的基本解，

$P^* = \frac{1}{2\pi K} \ln \frac{\sqrt{K}}{r}$ ， $v^* = K \frac{\partial P^*}{\partial \mathbf{n}}$ ， $r$ 为求解单元距积分单元的距离， $\Omega$ 表示求解区域， $\Gamma$ 表示 $\Omega$ 的边界。

分别采用三角形单元和线性单元将求解区域及其边界离散成*m*和*n*个单元，并对边界积分方程进行离散，得

$$\begin{aligned} c^i P^i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} v^* P d\Gamma = \\ \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} v P^* d\Gamma + \sum_{l=1}^m \int_{\Omega_l} Q P^* dA \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

上式可简化为

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} P_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} v_j + b_i \quad (15)$$

其中

$$H_{ij} = \int_{\Gamma_j} v^* d\Gamma + c^i \delta_{ij}, \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} P^* d\Gamma,$$

$$b_i = \sum_{l=1}^m \int_{\Omega_l} Q P^* dA$$

$\delta_{ij}$ 为Kronecker符号。

将代数方程 (15) 用于全部边界节点, 得代数方程组

$$HP = GV + B \quad (16)$$

式中

$$P = [P_1, P_2, \dots, P_n]^T, \quad V = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$$

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}$$

假设外边界共有  $n_m$  个节点, 内边界共有  $n_f$  个节点, 每个节点含有未知数  $P$  和  $v$ , 因此有  $2(n_m + n_f) + 2n_f$  个未知数。压力微分方程提供  $(n_m + n_f) + n_f$  个方程, 周期边界条件提供  $n_m$  个约束条件, 内边界条件提供  $2n_f$  个约束条件, 因此共有  $2n_m + 4n_f$  个方程, 方程组可以求解。

#### 4 利用等效渗透率张量确定裂缝性油藏的REV

REV 指能够宏观反映研究区域渗透特性的最小尺寸, 在这个尺度之上介质的性质 (主要是平均渗透率) 不再有明显的变化。本文确定 REV 的方法如下: 根据裂缝统计资料建立一个尺度较大的裂缝性油藏离散裂缝网络模型; 从中心位置分别划取一系列由小到大不同尺度的正方形研究区域, 利用上述给出的等效渗透率张量解法, 求解各个不同尺度区域的等效渗透率张量; 根据渗透率张量换算公式

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \cos^2 \alpha + K_2 \sin^2 \alpha & (K_1 - K_2) \sin \alpha \cos \alpha \\ (K_1 - K_2) \sin \alpha \cos \alpha & K_1 \sin^2 \alpha + K_2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (17)$$

计算得到渗透率主值  $K_1$  和  $K_2$ 。对两个主值进行分析比较, 当相应值趋于稳定时, 所对应的模拟区域的大小即可作为研究区域的REV。

### 5 实例及参数敏感性分析

采用文献[16]给出的裂缝性油藏裂缝属性参数统计数据 (见表 1), 油藏大小为  $152\text{m} \times 152\text{m}$ 。根据裂缝网络模拟程序得到相应的离散裂缝网络系统, 如图 3 所示。

表 1 油藏裂缝属性参数统计数据表

层号	长度 (m)		方位角 ( $^\circ$ )		密度 (条 $\text{m}/\text{m}^2$ )	
	平均值	标准偏差	平均值	标准偏差	数目	面密度
1	10.0	3.0	30.0	2.0	1369	0.5826
2	8.0	3.5	28.0	3.0	721	0.2456
3	7.0	3.5	25.0	3.5	659	0.2111

为研究裂缝属性参数对渗透率张量及 REV 的影响, 根据以上方法对相关因素进行如下分析。

#### 5.1 裂缝长度及密度

分别计算三个裂缝性油藏在不同模拟区域下的渗透率主值, 得到不同裂缝长度及密度条件下模拟区边长与渗透率主值的关系曲线, 如图 4 所示。

由图 4 可知, 裂缝长度和密度对渗透特性影响明显: 随着裂缝长度和密度的增加, 渗透率主值明显增大, 且随裂缝长度增大, 模型的 REV 增加。如图 4 所示, 当裂缝长度为  $7.0 \sim 10.0 \text{ m}$  时, REV 的大小基本保持在  $20 \text{ m}$  左右, 为裂缝长度的两倍多。

#### 5.2 裂缝开度

根据立方定律, 裂缝渗透率大体反映了裂缝的开度。以第三层模型为例, 分别计算裂缝开度为  $10 \mu\text{m}$  和  $100 \mu\text{m}$  时不同模拟尺寸的渗透率主值 (图 5)。可以看到, 模拟区域渗透率的变化与裂缝渗透率的变化趋势基本一致。随着裂缝渗透率的增加, 相应的渗透率主值增加, 模型的 REV 基本不发生变化。

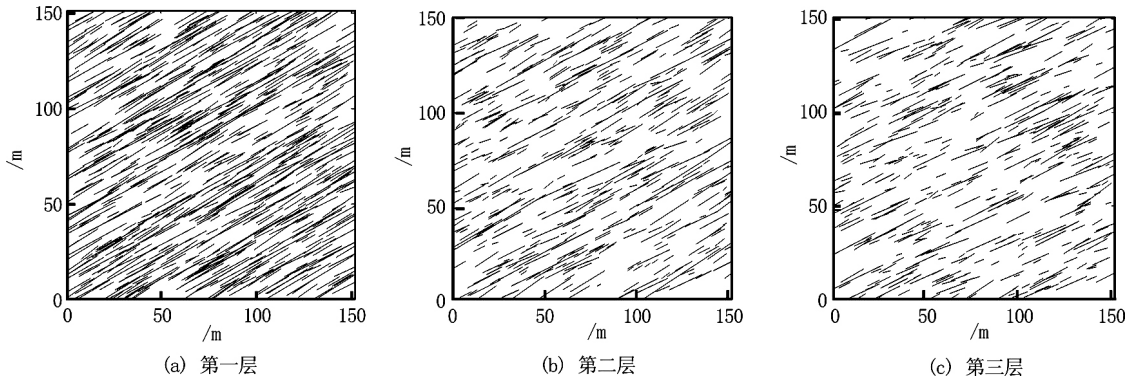


图3 二维裂缝性油藏

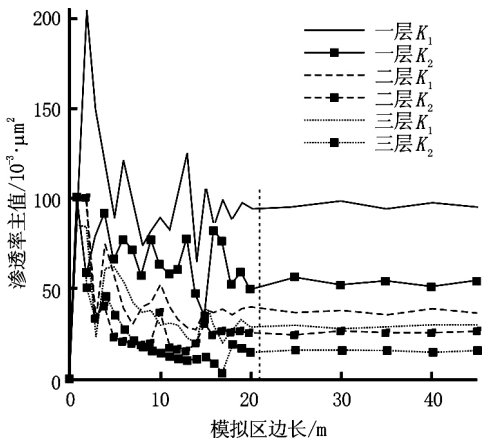


图4 不同裂缝长度和密度时模拟区边长与渗透率主值的关系曲线

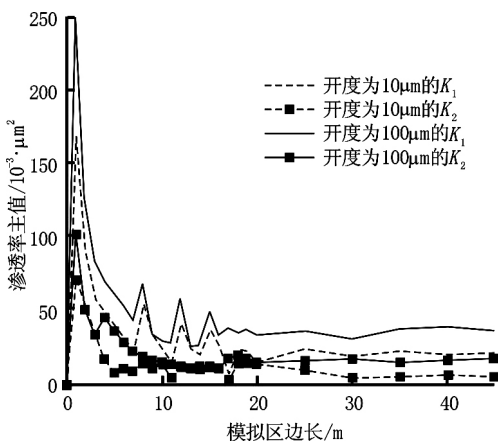


图5 不同裂缝开度时模拟区边长与渗透率主值的关系曲线

### 5.3 基岩渗透率

基岩对流体在地层内的渗流能力有重要影响，尤其是当基岩内不含互相联通的裂缝或裂缝较少时更是如此。以第三层为研究对象，分别计算基岩渗透率为  $0.1 \mu\text{m}^2$  和  $0.01 \mu\text{m}^2$  时的渗透率主值。图6绘出不同基岩渗透率时模拟区边长与渗透率主值的关系曲线。可以看到，随着基岩渗透率增加，渗透率主值明显增加。同时，基岩渗透率的变化对REV影响不大。

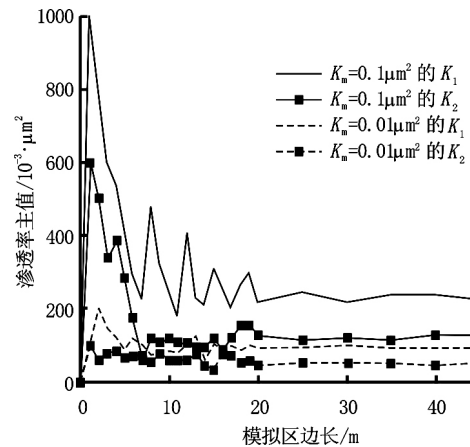


图6 不同基岩渗透率时模拟区边长与渗透率主值的关系曲线

## 6 结论

(1) 本文根据裂缝系统属性参数的统计资料，利用裂缝网络模拟技术建立了裂缝性油藏离散裂缝网络模型，并以此为基础对裂缝性油藏的相关参数进行分析；

(2) 根据流量等效原理, 建立了求解裂缝性油藏等效渗透率张量的数学模型, 并给出了数学模型的边界元求解方法;

(3) 在此基础上, 提出裂缝性油藏REV的确定方法, 分析了基岩和裂缝的属性参数对研究区域的渗透特性和REV的影响。研究表明, 基岩渗透率、裂缝密度和开度等参数对裂缝性油藏的渗透率张量都有影响, 忽略基岩渗透率将引起较大误差; REV受基岩渗透率和裂缝开度的影响很小, 但受裂缝长度和密度的影响较大。裂缝长度的增加将加剧裂缝性油藏的非均质性和各向异性, 进而提高了REV的尺寸;

(4) 本方法综合考虑基岩渗透率和裂缝的实际分布及属性参数对等效渗透率张量和REV的影响, 为裂缝性油藏渗流分析的参数确定提供了理论依据。

## 参 考 文 献:

- [1] WARREN J E, ROOT P J. The behavior of naturally fractured reservoirs[J]. SPE Journal, 1963, 3(3): 245-255.
- [2] HUSSEIN H, ABBAS F. An efficient numerical model for incompressible two-phase flow in fractured media[J]. Advances in Water Resources, 2008, 31(6): 891-905.
- [3] LONG J C S, REMER J S, WILSON C R, et al. Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures[J]. Water Resources Research, 1982, 18(3): 645-658.
- [4] SNOW D T. Anisotropic permeability of fractured media[J]. Water Resources Research, 1969, 5(6): 1273-1289.
- [5] CHEN S H, FENG X M, ISAM S. Numerical estimation of REV and permeability tensor for fractured rock masses by composite element method[J]. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2008, 32(12): 1459-1477.
- [6] BAGHBANAN A, JING L. Stress effects on permeability in a fractured rock mass with correlated fracture length and aperture[J]. Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(8): 1320-1334.
- [7] 荣冠, 周创兵, 王恩志. 裂隙岩体渗透张量计算及其表征单元体积初步研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(4): 740-746.  
RONG Guan, ZHOU Chuang-bing, WANG En-zhi. Preliminary study on permeability tensor calculation of fractured rock mass and its representative elementary volume[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(4): 740-746.
- [8] 张贵科, 徐卫亚. 裂隙网络模拟与REV尺度研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(6): 1675-1680.  
ZHANG Gui-ke, XU Wei-ya. Analysis of joint network simulation method and REV scale[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008: 29(6): 1675-1680.
- [9] 郭大立, 曾晓慧, 江茂泽. 计算各向异性岩心渗透率的方法研究[J]. 水动力学研究与进展, A辑, 2004, 19(1): 61-69.  
GUO Da-li, ZENG Xiao-hui, JIANG Mao-ze. On the calculation of anisotropic reservoir permeability[J]. Journal of Hydrodynamics, Ser.A, 2004, 19(1): 61-69.
- [10] GITMANA I M, ASKES B H, SLUYSC L J. Representative volume: Existence and size determination[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2007, 74(16): 2518-2534.
- [11] LI S, SINGHA C V, TALREJA R. A representative volume element based on translational symmetries for FE analysis of cracked laminates with two arrays of cracks[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(7-8): 1793-1804.
- [12] TAMAGAWA T, MATSUURA T, ANRAKU T, et al. Construction of fracture network model using static and dynamic data[C]. SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, Inc, 2002. 1-12.
- [13] 邢玉忠. 裂缝性潜山油藏裂缝网络模型及其应用[D]. 北京: 中国地质大学, 2007.  
XING Yu-zhong. Fracture net model and application of buried hill reservoirs[D]. China Univ. of Geosciences, Beijing, 2007.
- [14] DURLOFSKY L J. Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media[J]. Water Resources Research, 1991, 27(5): 699-708.
- [15] 杨德全, 赵忠生. 边界元理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2002.  
YANG De-quan, ZHAO Zhong-sheng. Boundary element theory and application[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2002.
- [16] LEE S H, DURLOFSKY L J, LOUGH M F, et al. Finite difference simulation of geologically complex reservoirs with tensor permeability[J]. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 1998, 1(6): 567-574.