

文章编号: 1000 - 7598 - (2007) 08 1729 04

任意三角形毛细管中水力传导率与形状因子关系研究

陶 军, 姚 军, 李爱芬, 赵秀才

(中国石油大学, 山东 东营 257061)

摘 要: 孔隙级网络模型可以用简单几何体来代表真实的孔隙孔喉, 以分析流体在这些简单几何体中的流动, 具有重要的意义。利用有限元法对任意三角形截面管中的单相和油水两相流动的速度场进行了求解, 后由速度场进一步计算出了水力传导率。研究了水力传导率与形状因子之间的关系, 结果表明, 单相流水力传导率与形状因子近似呈直线关系, 而油水两相流时, 水力传导率除与形状因子有关外, 还随着角落半角和油水接触角的变化而变化。

关 键 词: 水力传导率; 形状因子; 孔隙级网络模型; 有限元法; 三角形毛细管

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Research on relationship between shape factor and hydraulic conductance for flow in arbitrary triangular capillary

TAO Jun, YAO Jun, LI Ai-fen, ZHAO Xiu-cai

(China University of Petroleum, Dongying 257061, China)

Abstract: Pore-scale network model represents the genuine pores and throats with simplified geometry objects, to analyze the flow in which is of great importance. Firstly the finite element method is used to solve the velocity field which is then used to calculate hydraulic conductance. The relation between hydraulic conductance and shape factor is researched. As for the single phase flow, the result shows that the hydraulic conductance is nearly linear to shape factor. While with respect to two phase flow, it also changes with half corner angle and oil-water contact angle.

Key words: hydraulic conductance; shape factor; pore-scale network model; finite element method; triangular capillary

1 引 言

近几年来越来越多的学者开始关注于利用孔隙级网络模型研究多孔介质中的流动问题^[1-6]。在微观级别上, 多孔介质中的流动主要是受毛细管压力的控制。国外已有众多的学者利用拟静态孔隙级网络模型成功地预测了毛细管压力、绝对渗透率和相对渗透率等性质^[7-9]。在建立孔隙网络模型时必须考虑孔隙和孔喉的形状, 由于真实孔隙和孔喉形状的复杂性, 往往要把孔隙孔喉简化成等截面、且截面形状简单的几何体, 如简化成截面为正方形、任意三角形和圆形等的毛细管。对于圆形管中的流动, 可以利用 Poiseuille 公式很容易地求出单相流时的传导率, 但对于其他形状, 特别是任意三角形,

不能直接利用 Poiseuille 公式。文[10]给出了正方形和圆形管中单相层流时传导率的解析表达式。对于任意三角形, 无法用解析式表达, 文[10]虽然利用保角变换求出了传导率与形状因子之间的关系, 但该方法较本文的有限元法复杂。

2 三角形形状因子与内角关系

真实孔隙体与孔喉的截面形状非常复杂, 并且截面大小也是变化的。Mason 和 Morrow 在 1991 年定义形状因子为

$$G = A / P^2 \quad (1)$$

式中: A 为孔隙孔喉截面积; P 为截面的周长。

对于任意截面形状毛细管, 其水力半径 R_h 为

收稿日期: 2005-12-01

修改稿收到日期: 2006-02-28

基金项目: 中国石油化工集团公司科技攻关项目 (No. P05056)

作者简介: 陶军, 男, 1974 年生, 博士研究生, 助理工程师, 主要研究方向为油气渗流理论与应用。E-mail: taojune@gmail.com

$$R_h = A/P \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)可得

$$G = \frac{R_h}{P} \tag{3}$$

由式(3)可以认为形状因子 G 为无因次的水力半径。当知道毛细管的水力半径后就可以用它来计算平均曲率半径和驱替时的毛细管入口压力等。而毛细管入口压力的计算对于孔隙级网络模型是非常重要的。

对于如图1所示的任意三角形截面, r 为内切圆半径, β_1 、 β_2 和 β_3 分别为三角形3个内角的半角, 并设 $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ 。由初等几何可以得到:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2}Pr; \\ G &= \frac{1}{4 \sum_{i=1}^3 \cot \beta_i} = \frac{1}{4} \tan \beta_1 \tan \beta_2 \cot(\beta_1 + \beta_2) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

根据 G 的定义, 对于三角形截面可以确定, G 的取值范围从 $0 \sim 0.0481$, 其中 0.0481 对应着等边三角形的形状因子。为了产生任意的三角形, 可以在 G 的取值范围内随机确定一个形状因子。给定形状因子后就可以求出一定范围内的3个内角的半角值。文[7]给出了详细地求解过程, 需要指出的是, G 与 β_1 、 β_2 和 β_3 并不是一一对应的关系, 一个形状因子可以对应很多的三内角组合关系。

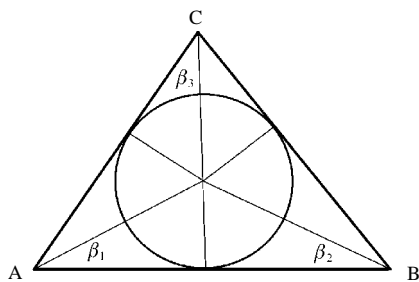


图1 三角形孔隙截面

Fig.1 Cross-section of triangular pore

3 任意三角形毛细管中单相流时传导率计算

对于任意三角形毛细管中的单相流动, 作如下假设: 流动为稳态的、流体为牛顿、不可压缩流体。这些假设与一般的拟静态孔隙网络模型的假设是一致的。在以上假设条件下可以建立方程来表征毛细管中的单相流动:

$$\nabla^2 \bar{v} = \frac{1}{\mu} (\Delta p - \rho \bar{f}) \tag{5}$$

式中: \bar{v} 为流体速度; \bar{f} 为单位质量的体积力, 在此为常数; μ 为流体黏度; ρ 为流体密度。考虑无滑脱边界条件, 在如图1所示的三角区域内求解式(5), 由此得到完整的数学模型为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{v} &= \frac{1}{\mu} (\Delta p - \rho \bar{f}); \\ v(x, y) &= 0, \text{ (三角形毛细管壁上)} \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

传导率 g 定义为沿毛细管流动时, 单位压力梯度下的体积流量, 即有

$$Q = \langle v \rangle A = -g (\nabla p - \rho f_3) \tag{7}$$

与圆管流的 Hagen-Poiseuille 公式类似, 传导率表达为

$$g = \frac{r^2 A}{\chi \mu} \tag{8}$$

$$\chi = \frac{-r^2 (\nabla p - \rho f_3)}{\langle v \rangle \mu} \tag{9}$$

式(6)为一椭圆泊松方程, 文[10]利用保角变换进行了求解, 在此采用有限元法, 程序框图如图2所示。

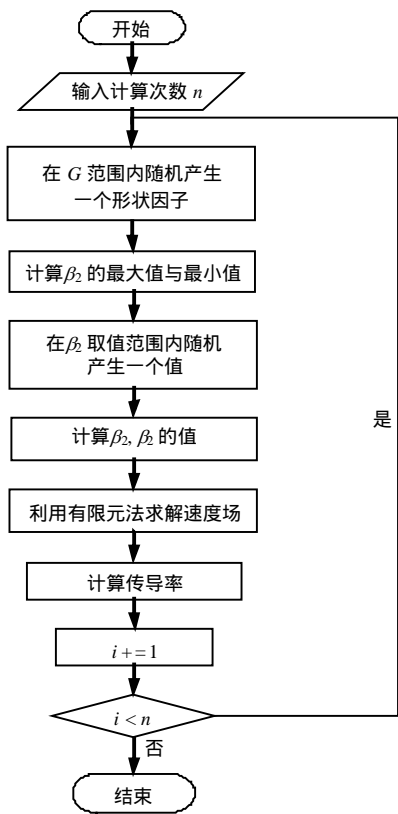


图2 程序框图

Fig.2 Program flow chart

单相时的传导率计算结果如图 3 所示，图中圆圈代表计算所得到的无因次传导率，直线为计算结果经一次线性拟合所得到的结果，其斜率为 3/5。由此可以得到任意三角形截面导管中单相流时的传导率计算公式为

$$\tilde{g} = \frac{g\mu}{A^2} \approx \frac{3}{5}G \quad (10)$$

根据式 (10)，只要知道孔隙网络模型中基本组成单元的形状因子，就可以求出单相流体在其中流动时的传导率，并进而可以对流体在孔隙网络模型中流动时的控制方程组进行求解。由此可见传导率计算正确与否对孔隙网络模型的有效性具有重要的意义。

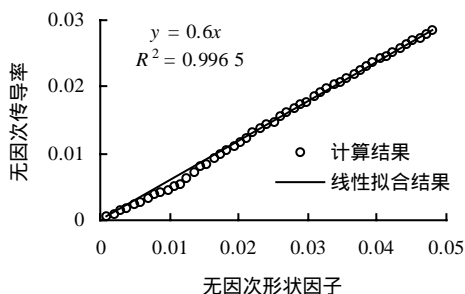


图 3 单相时三角形毛细管中传导率与形状因子之间的关系
Fig.3 The relation between conductance and shape factor for single phase flow in triangular capillary

4 油水两相时传导率的计算

在截面为三角形的毛细管中，考虑油水两相流动时，由于油水在其中分布形态的不同，使得计算更为复杂，到目前还没有统一的计算公式。在孔隙级网络模型中通常对于处在孔隙孔喉中央的油（非湿相）的传导率计算采用前面所说的单相时的计算公式，而对于处在孔隙角落的水（润湿相）的传导率则由数值模拟计算得到。

由于对处在孔隙孔喉中央的非湿相流体的传导率采用与单相时相同的计算方法，在此仅对处在角落中的湿相流体 水的传导率计算进行研究。如图 4 所示，粗线为三角形的一个角，细线分别表示不同的油水界面位置。

油水两相时采用与单相时相同的假设条件，基本数学模型为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 v_j + \frac{\Xi_j}{\mu_j} &= 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega_j, \\ \Xi_j &= \left(\frac{\Delta p_j}{L} + \rho_j f_3 \right), \quad j = w, o \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

为了使计算结果具有一般性，坐标用弯液面沿

角一边到角顶点的距离 b ，流体黏度用润湿相黏度进行无因次化为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_i / b, \quad i = 1, 2, 3 \\ \tilde{v}_j &= \frac{1}{\chi_j} = \frac{v_j \mu_w}{b^2 \Xi_j}, \quad j = w, o \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

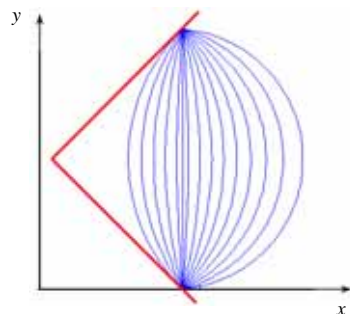
式中 χ_j 为第 j 相流体的水力阻力因子。把式 (12) 代入式 (11) 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu}_j \nabla^2 \tilde{v}_j + 1 &= 0, \quad j = w, o \\ \tilde{\mu}_w &= 1, \quad \tilde{\mu}_o = \mu_w / \mu_o \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

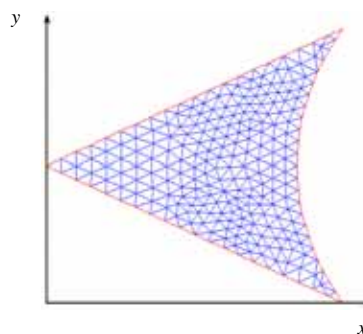
边界条件只考虑在角两边和油水界面上全部采用无滑脱条件，即 $v(x_1, x_2) = 0$ 。在如图 4(a) 所示的区域内求解式 (13)，按有限元方法划分成如图 4(b) 所示的网格。求出速度场后可以按式 (14) 和式 (15) 分别计算平均速度以及流量，进而求出角落落在对应的半角和接触角下的传导率：

$$\langle \tilde{v}_j \rangle = \frac{1}{A_j} \int_{\Omega_j} \tilde{v}_j d\tilde{A}, \quad j = w, o \quad (14)$$

$$Q_j = \int_{\Omega_j} v_j dA = g_j \Xi_j = \frac{b^4}{\mu_w \Omega_j} \int_{\Omega_j} \tilde{v}_j d\tilde{A} = \frac{b^4}{\mu_w} \tilde{g}_j, \quad j = w, o \quad (15)$$



(a) 不同接触角下三角形角落中的水分布



(b) 某一接触角下的有限元网格

图 4 有限元法求解区域

Fig.4 The solving domain of finite element method

图 5 给出了油水接触角从 0° 增加到 160° 、角落半角从 10° 增加到 72° 时的无因次传导率计

算结果。图 6 为形状因子与传导率除以角落水相所占面积平方之间的半对数关系曲线。从图 5 和图 6 可知，油水两相流动时，位于三角形毛细管角落中的水的流动是非常复杂的。与单相时的图 3 对比可知，传导率与形状因子间的关系并不是简单地成近似直线关系，而是随角落半角、油水接触角的变化而变化。

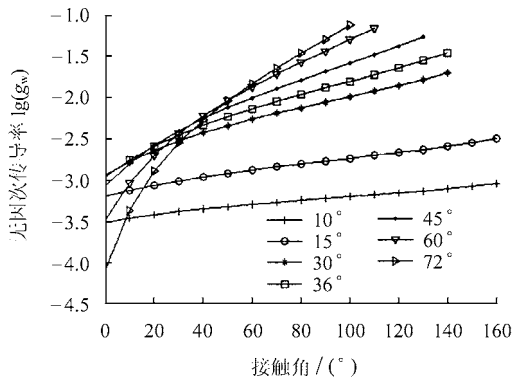


图 5 不同角落半角时油水接触角与无因次传导率之间的关系

Fig.5 The relationship between oil-water contact angle and dimensionless hydraulic conductance under different half corner angles

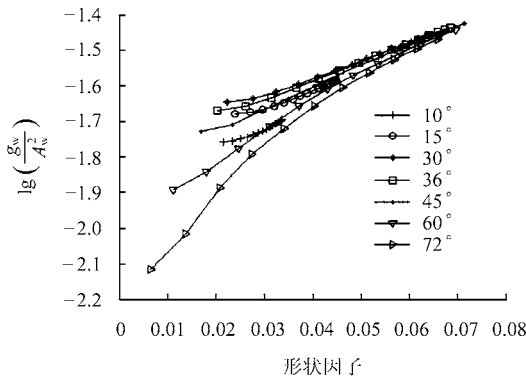


图 6 形状因子与 $\lg(g_w/A_w^2)$ 关系曲线

Fig.6 The relation between shape factor and the logarithm of the ration of the dimensionless hydraulic conductance and the dimensionless corner filament area squared

5 结 论

(1) 利用孔隙网络模型研究多相流动时，通常都把真实的孔隙、孔喉简化成简单的几何体。分析简单几何体中的流体流动对于利用孔隙级网络模型研究多相流具有重要的意义。本文采用有限元法求解了三角形截面管中单相和油水两相层流时不同形状因子下的水力传导率。

(2) 单相流的计算结果表明，任意三角形截面管中单相时的无因次水力传导率与截面的形状因子之间近似呈斜率为 3/5 的直线关系。本文的计算

方法比文[10]所采用的保角变换方法更简单。

(3) 油水两相流时，处于三角形截面管中央的油的水力传导率可以采用单相时的计算方法进行求解。本文对于处在角落中的水的传导率采用有限元法进行了求解。计算结果表明，传导率与形状因子之间的关系并不是简单地呈近似直线关系，而是随角落半角、油水接触角的变化而变化。

(4) 油水两相流时，处于角落中的水的传导率受形状因子、角落半角、接触角等因素的影响，如何形成统一的公式来表征水力传导率与形状因子之间的关系还需进一步研究。

参 考 文 献

- [1] Øren P E, Bakke S. Process based reconstruction of sandstones and prediction of transport properties[J]. *Transport in Porous Media*, 2002, 46: 311 - 343.
- [2] Øren P E, Bakke S. Reconstruction of Berea sandstone and pore-scale modelling of wettability effects[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2003, 39: 177 - 199.
- [3] Piri M, Blunt M J. Pore-scale modeling of three-phase flow in mixed-wet systems[D]. *Proceedings of the 2002 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*[C]. U.S.A: Society of Petroleum Engineers, 2002.
- [4] Man H N, Jing X D. Pore network modelling of electrical resistivity and capillary pressure characteristics[J]. *Transport in Porous Media*, 2000, 41: 263 - 286.
- [5] Dillard L A, Blunt M J. Development of a pore network simulation model to study nonaqueous phase liquid dissolution[J]. *Water Resources Research*, 2000, 36: 439 - 454.
- [6] 吴继敏, 孙少锐, 魏继红. 应用力学机理的网络模拟预测隧洞超挖问题[J]. *岩土力学*, 2004, 25(8): 1 220 - 1 224. WU Ji-ming, SUN Shao-rui, WEI Ji-hong. Forecast of overbreak in opening based on discontinuity surface mapping of mechanics mechanism[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(8): 1 220 - 1 224.
- [7] Patzek W. Verification of a Complete Pore Network Simulator of Drainage and Imbibition[A]. *Proceedings of the 2000 SPE/DOE Improved Oil Recovery Symposium*[C]. U.S.A: Society of Petroleum Engineers, 2001.
- [8] Svirsky D S, van Dijke M I J, Sorbie K S. Prediction of three-phase relative permeabilities using a pore-scale network model anchored to two-phase data[A]. *Proceedings of the 2004 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*[C]. Houston: Texas, Society of Petroleum Engineers, 2004.
- [9] Per H. Valvatne, Martin J. Blunt. Predictive pore-scale network modeling[A]. *Proceedings of the 2003 SPE Annual Technical Conference and Exhibition*[C]. U.S.A: Society of Petroleum Engineers, 2003.
- [10] Patzek T W, Silin D B. Shape factor and hydraulic conductance in noncircular capillaries I: one-phase creeping flow[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2001, 236: 295 - 304.