

文章编号: 1009-4881 (2009) 03-0001-06

DOI 10.3969/j.issn.1009-4881.2009.03.001

# 考虑渗透率张量的各向异性油藏 有限元数值模拟方法

姚 军, 李亚军, 黄朝琴

(中国石油大学(华东)石油工程学院, 山东 青岛 266555)

**摘 要:** 考虑完全各向异性渗透率张量, 建立了混合边界各向异性油藏弹性微可压缩单相流体不稳定渗流的数学模型。根据变分原理, 将压力微分方程的边值问题转化为泛函的极值问题, 建立了渗流模型的有限元方程。针对典型的均质各向同性和均质各向异性渗流问题进行了模拟计算, 得到油藏内压力动态分布曲线, 并分析了曲线特征。与解析结果的对比表明, 有限元法计算精度很高, 适用于求解利用渗透率张量表征的各向异性渗流问题。为各向异性油藏的开发和精细油藏数值模拟提供了理论依据。

**关键词:** 各向异性; 油藏; 渗透率张量; 数学模型; 有限元法; 数值模拟

**中图分类号:** TE 319

**文献标识码:** A

## Finite element simulation of an isotropic reservoir considering full permeability tensor

YAO Jun, LI Ya-jun, HUANG Zhao-qin

(College of Petroleum Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266555, China)

**Abstract:** Transient model considering full tensorial permeability and mixed boundaries was presented to simulate a single phase flowing in an anisotropic reservoir. Based on the principle of variation, boundary value problem of pressure partial differential equation was transformed into the extreme value problem of functionelle and finite element equation of flow model was deduced for calculating the simulation result. Two typical examples of homogeneous anisotropic and isotropic reservoirs were solved to demonstrate the robustness of the proposed method. Numerical results show the validity and calculation accuracy of the finite element method compared with analytic solution, which proves that finite element method is reliable and precise to solve anisotropic flow problems with permeability tensors. This research presents an important theoretical direction for the development of anisotropic reservoirs and detailed reservoir numerical simulation.

**Key words:** anisotropy; reservoir; permeability tensor; mathematic model; finite element method; numerical simulation

实际油藏往往是各向异性的,且区域形状复杂多样,目前油藏数值模拟应用较多的有限差分法<sup>[1-2]</sup>虽理论成熟、方法简单,但由于一般采用正交

网格,存在严重的网格取向效应,在处理非规则边界问题时存在较大的局限性;此外,传统的数值模拟方法所采用的向量形式是渗透率主轴方向与坐标轴方

收稿日期: 2009-04-02

姚军(1964-),男,博士,教授, E-mail: yaojunhpu@126.com

基金项目: 国家“973”项目资助(2006CB202404)。

向相同时的一种近似,若渗透率主轴与坐标轴方向不一致,则采用向量形式必然产生较大误差。基于上述问题,建立适应具有复杂边界的各向异性地层并能够处理全张量形式渗透率的油藏数值模拟方法,进而对油藏动态进行准确模拟和预测,对于此类油藏合理、高效的开发具有十分重要的理论价值和现实意义。

与传统方法相比有限元法<sup>[3]</sup>具有诸多优点:

(1)克服了有限差分法对区域形状的限制,可以灵活处理各种形状的边界问题;(2)网格剖分更为灵活,网格取向性较弱;(3)边界条件的处理比较方便,第一类和第二类边界条件可直接引入,而有限差分法需要采用虚拟的网格结点。这些优点促进了有限元法在油气田开发领域的研究和应用。

Javandel<sup>[4]</sup>首次将有限元法引入油藏渗流问题,模拟了定产量生产下的单相液体二维不稳定渗流问题。在此基础上,许多学者<sup>[5-7]</sup>进一步深入研究了有限元法在油藏数值模拟中的应用。Nobuo<sup>[8]</sup>对有限元法在油藏渗流问题中的研究和应用作了一个较系统的总结和评述,对有限元法的计算误差与计算量问题进行了定性的分析。他指出:随着油藏模拟精度的提高和计算机硬件条件的改善,有限元法具有广泛的研究和应用前景。袁益让和王文洽<sup>[9]</sup>在国内率先进行了有限元油藏数值模拟研究,建立了考虑封闭边界条件下油水两相渗流平面弹性驱动问题的有限元法。周竹眉、蒋廷学等人<sup>[10-11]</sup>开展了有限元法在水平井、低渗透油藏等方面的研究,拓宽了有限元法的应用范围。吕秀凤等<sup>[12]</sup>对多区非均质油藏的有限元法理论进行了分析,但每个分区视为均质,使得该方法的应用受到限制。董平川等<sup>[13]</sup>研究了两维正交各向异性稳定渗流的有限元模拟方法,方法忽略岩石和流体的压缩性,且第二类边界条件处理为封闭边界,具有一定的局限性。

本文利用有限元法研究了具有张量形式渗透率的油藏渗流问题。首先考虑渗透率张量,建立了混合边界各向异性油藏弹性微可压缩单相流体不稳定渗流的数学模型,然后建立了渗流模型的有限元方程并进行实例分析。

## 1 数学模型

本文假设,油藏为各向异性油藏,利用全张量形式的渗透率表征其渗透性,渗流符合达西定律,岩石和流体均微可压缩,忽略重力。各向异性油藏单相

渗流的广义达西公式和连续性方程为

$$\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla p, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{v}) + q = \frac{\partial(\phi)}{\partial t}. \quad (2)$$

式中:渗流流速  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ , 压力梯度  $\nabla p = \left[ \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right]^T$ , 和  $\mu$  为流体密度和粘度,  $\phi$  为孔隙度,  $q$  为源汇项,  $\mathbf{K}$  表示油藏的渗透率张量,  $\mathbf{K}$  具有对称形式<sup>[14]</sup>, 即  $K_{ij} = K_{ji}$  ( $i, j = x, y, z$ ), 渗透率张量  $\mathbf{K}$  表示为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

渗流速度的分量为

$$v_i = -\frac{1}{\mu} \left[ K_{ix} \frac{\partial p}{\partial x} + K_{iy} \frac{\partial p}{\partial y} + K_{iz} \frac{\partial p}{\partial z} \right] \quad (i = x, y, z). \quad (4)$$

岩石和流体的状态方程分别为

$$C_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad (5)$$

$$C_L = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (6)$$

式中:  $C_f$ 、 $C_L$  分别表示岩石和流体的压缩系数。

图 1 所示为求解区域及边界示意图。对于求解区域,其边界分为两部分:  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ , 且  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ ,  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , 边界  $\Gamma$  的外法向量  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ 。本文考虑混合边界条件:在边界  $\Gamma_1$  上给定压力分布,在边界  $\Gamma_2$  上给定流量  $\bar{q}$ , 当  $\bar{q} = 0$  时即为封闭边界条件。模型的边界条件和初始条件为

$$p = \bar{q}(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \Gamma_1, \quad (7)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \bar{q}(x, y, z, t) \quad (x, y, z) \in \Gamma_2, \quad (8)$$

$$p(x, y, z, 0) = p_1(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \Gamma. \quad (9)$$

将达西公式 (1) 代入连续性方程 (2), 为书写简便, 写成速度分量的形式

$$-\frac{1}{B} \left[ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + q_v = \frac{C_1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (10)$$

其中, 体积系数  $B = \frac{\rho}{\rho_{sc}}$ ,  $\rho_{sc}$  为地层流体在地面标准条件下的密度,  $q_v = q / \rho_{sc}$ ,  $C_1 = \phi C_f / B$ , 综合压缩系数  $C_t = (C_f + C_L)$ 。式 (10) 即为单相流体压力微分方程。

则由 (7) ~ (10) 组成求解各向异性油藏弹性微可压缩单相流体不稳定渗流问题的数学模型。

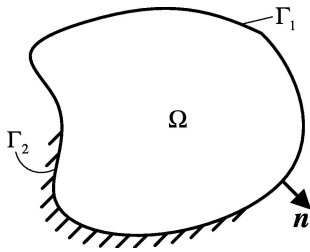


图 1 求解区域及边界示意图

## 2 有限元方程的推导

### 2.1 问题的变分叙述

现利用变分原理将微分方程的边值问题转化为与之等效的泛函的极值问题。压力微分方程 (10) 的等效积分形式为

$$J(p) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{B} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - q_v + C_1 \frac{\partial p}{\partial t} \right] d\Omega - \iint_{\Gamma_2} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \bar{q}) d\Gamma \quad (11)$$

对 (11) 式进行分部积分, 得到微分方程的等效积分弱形式

$$J(p) = - \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_x}{B} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_z}{B} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + q_v p - C_1 \frac{\partial p}{\partial t} p \right) \right] d\Omega + \iint_{\Omega} p(n_x v_x + n_y v_y + n_z v_z) d\Omega - \iint_{\Gamma_2} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \bar{q}) d\Gamma \quad (12)$$

由于在  $\Gamma_1$  上  $p=0$ , 且注意边界的组成, (12) 式整理后变为

$$J(p) = - \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v_x}{B} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v_z}{B} \left( \frac{\partial p}{\partial y} + q_v p - C_1 \frac{\partial p}{\partial t} p \right) \right] d\Omega + \iint_{\Gamma_2} \bar{q} p d\Gamma \quad (13)$$

将 (4) 式代入 (13) 式得泛函的变分为

$$J(p) = - \iint_{\Omega} \left[ q - C_1 \frac{\partial p}{\partial t} \right] p d\Omega + \iint_{\Gamma_2} \bar{q} p d\Gamma + \iint_{\Omega} \left[ \frac{xx}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{yy}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{zz}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \left[ \frac{xy}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{yz}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{xz}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] \right] d\Omega \quad (14)$$

其中  $K_{ij} = \frac{K_{ij}}{\mu B}$  ( $i, j = x, y, z$ ).

因此, 各向异性油藏弹性不稳定渗流问题的泛函为

$$J(p) = - \iint_{\Omega} \left[ q - C_1 \frac{\partial p}{\partial t} \right] p d\Omega + \iint_{\Gamma_2} \bar{q} p d\Gamma + \iint_{\Omega} \left[ \frac{xx}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{yy}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \frac{zz}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 + \left[ \frac{xy}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{yz}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{xz}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] \right] d\Omega \quad (15)$$

原问题等价于该泛函的极值问题: 若函数  $p(x, y, z, t)$  满足第一类边界条件 (7) 和初值条件 (9), 并使泛函  $J(p)$  达到了极值, 则  $p(x, y, z, t)$  即为所求函数。

### 2.2 压力有限元方程

问题的有限元方程可用变分法来推导, 首先将区域  $\Omega$  离散成  $e$  个单元体, 单元  $E$  内的压力  $p^e(x, y, z, t)$  可以近似地由单元的结点压力  $p_i$  插值得到

$$p^e(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y, z) p_i(t) = \mathbf{N} p^e \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{N} = [N_1(x, y, z) \quad N_2(x, y, z) \quad \dots \quad N_{n_e}(x, y, z)] \quad (17)$$

$$p^e = [p_1(t) \quad p_2(t) \quad \dots \quad p_{n_e}(t)]^T \quad (18)$$

$\mathbf{N}$  为单元  $e$  的结点插值函数行阵,  $N_i(x, y, z)$  为对应于单元  $e$  中结点  $i$  的插值函数 ( $i=1, 2, \dots, n_e$ ),  $p^e$  为单元  $e$  的结点压力列阵,  $p_i(t)$  为单元  $e$  中结点  $i$  的压力,  $n_e$  是单元  $e$  的结点数。

将 (16) 代入 (15), 得到每个单元上的泛函为

$$J^e(p^e) = - \iint_{\Omega^e} \left[ q - C_1 \frac{\partial p^e}{\partial t} \right] p^e d\Omega^e + \iint_{\Gamma_2^e} \bar{q} p^e d\Gamma^e + \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{xx}{2} \left( \frac{\partial p^e}{\partial x} \right)^2 + \frac{yy}{2} \left( \frac{\partial p^e}{\partial y} \right)^2 + \frac{zz}{2} \left( \frac{\partial p^e}{\partial z} \right)^2 + \left[ \frac{xy}{2} \left( \frac{\partial p^e}{\partial x} \frac{\partial p^e}{\partial y} \right) + \frac{yz}{2} \left( \frac{\partial p^e}{\partial y} \frac{\partial p^e}{\partial z} \right) + \frac{xz}{2} \left( \frac{\partial p^e}{\partial x} \frac{\partial p^e}{\partial z} \right) \right] \right] d\Omega^e \quad (19)$$

对泛函 (19)取极值,则推导得典型单元  $e$  的有限元求解方程为

$$\frac{\partial}{\partial p^e} (p) = H^e p^e + D^e p^e - F^e \quad (20)$$

其中

$$H^e = \iiint_{\Omega^e} \left[ \begin{aligned} &xx \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \frac{\partial N}{\partial x} + yy \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \frac{\partial N}{\partial y} + \\ &zz \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)^T \frac{\partial N}{\partial z} + xy \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \frac{\partial N}{\partial y} + \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \frac{\partial N}{\partial x} \right] + \\ &yx \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \frac{\partial N}{\partial z} + \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)^T \frac{\partial N}{\partial x} \right] + \\ &yz \left[ \left( \frac{\partial N}{\partial z} \right)^T \frac{\partial N}{\partial y} + \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)^T \frac{\partial N}{\partial z} \right] \end{aligned} \right] d = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{T}^T \mathbf{M} d$$

$$\dot{p}^e = \left[ \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial p_n}{\partial t} \right]^T, \quad D^e = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d$$

$$F^e = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T d - \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}^T d$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{bmatrix}$$

对每个单元加以组合,得到整个系统的有限元求解方程

$$\mathbf{H}p + \mathbf{D}\dot{p} - \mathbf{F} = 0 \quad (21)$$

其中  $\mathbf{H} = \sum_{e=1}^E \mathbf{H}^e, \mathbf{D} = \sum_{e=1}^E \mathbf{D}^e, \mathbf{F} = \sum_{e=1}^E \mathbf{F}^e, p$  为所有结点压力的列阵。

压力对时间导数的离散采用差分法

$$\dot{p} = \frac{p^{n+1} - p^n}{t_n} \quad (22)$$

其中,  $t_n$  为  $n$ 时刻到  $n+1$ 时刻的时间间隔,  $p^n$  为  $n$ 时刻的结点压力列阵。

将式 (22)代入方程 (21)并整理得:

$$\frac{\mathbf{D}}{t_n} p^{n+1} = \left[ \frac{\mathbf{D}}{t_n} - \mathbf{H} \right] p^n + \mathbf{F} \quad (23)$$

由方程 (23),引入边界条件 (7)和初始条件 (9)即可求解。

### 3 实例研究

本文分别模拟了均质各向同性和均质各向异性两种类型的渗流问题,将数值计算结果和解析结果进行对比,验证本文方法的正确性,同时对压力曲线特征进行了分析。

#### 3.1 均质各向同性渗流问题

无限大平面地层中心一口井定产量生产,液流向井的渗流是完全的平面径向流。计算采用的相关参数:初始压力  $p_i = 30\text{Mpa}$ ,井产量  $Q = 100\text{m}^3/\text{d}$ ,井半径  $R_w = 100\text{cm}$ ,地下原油黏度  $\mu = 2\text{mPa} \cdot \text{s}$ ,地层有效厚度  $h = 10\text{m}$ ,地层渗透率  $K = 0.5\mu\text{m}^2$ ,地层导压系数  $ae = 10^4\text{cm}^2/\text{s}$

在任一时刻  $t$ 地层中距井点  $r$ 处的压力值  $p(r, t)$ 的解析解为<sup>[15]</sup>:

$$p(r, t) = p^2 - \frac{Q\mu}{4Kh} \left[ -E_i \left( -\frac{r^2}{4aet} \right) \right] \quad (24)$$

式中:  $E_i$  为累积分函数。

对于有限区域的封闭边界油藏,在压力波没有传播到边界之前,当其它条件相同时,其油藏压力动态与无限大情形相同。因此,利用有限元模拟方法求解有界油藏的压力变化动态,分别将井点处和距井点距离为 1m、100m处的压降数值计算结果与解析值对比,如图 2。由图 2可见,有限元数值模拟结果与解析结果基本一致;油藏生产初期油藏压力变化幅度较大,然后趋于平缓,压力波逐渐向外扩散;近井处的压降明显大于远井地带。

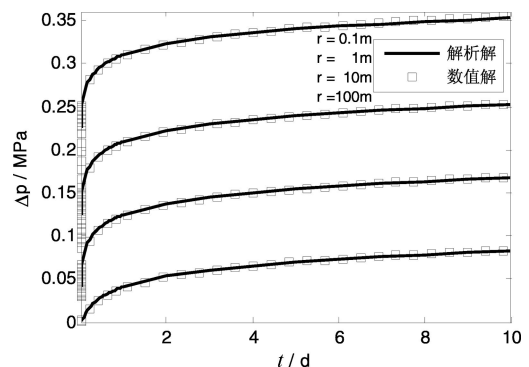


图 2 各向同性地层中不同位置压降比较示意图

#### 3.2 均质各向异性渗流问题

如图 3,在直角坐标系  $O-xy$  中,平面油藏为均质正交各向异性,其渗透率主值为  $K_x = 0.5\mu\text{m}^2, K_y = 0.05\mu\text{m}^2$ ,渗透率主轴方向与坐标轴方向平行,其它条件与上例相同。此时油藏内压力的解析解<sup>[16]</sup>

为

$$p(r, t) = p_i - \frac{Q}{4 T_a} \left[ - E \left( - \frac{r^2 S_a}{4 T_a t} \right) \right] \quad (25)$$

其中,视传导系数  $T_a = h \sqrt{K_x K_y} / \mu$ ,视储存系数  $S_a = \phi C_t h \left( \frac{\cos^2}{\sqrt{K_x / K_y}} + \frac{\sin^2}{\sqrt{K_y / K_x}} \right)$ ,  $(r, )$ 为所求点  $P$ 的极坐标。

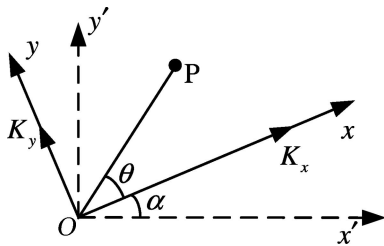


图 3 各向异性油藏坐标转换关系

将坐标  $O-xy$ 系统坐标原点瞬时旋转,得到新坐标系  $O-x'y'$ ,在新坐标系下渗透率张量的表达式<sup>[17]</sup>为

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_x \cos^2 \alpha + K_y \sin^2 \alpha & (K_x - K_y) \sin \alpha \cos \alpha \\ (K_x - K_y) \sin \alpha \cos \alpha & K_x \sin^2 \alpha + K_y \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (26)$$

当  $\alpha = 30^\circ$ 时,渗透率张量为  $K = \begin{pmatrix} 387.5 & 194.9 \\ 194.9 & 162.5 \end{pmatrix} \times 10^{-3} \mu m^2$ ,此时,在  $O-x'y'$ 坐标系下,利用有限元法计算在  $r = 100m$ 圆周处,极角分别为  $30^\circ; 60^\circ; 75^\circ; 90^\circ; 120^\circ$  处的压降随时间的变化值,将计算结果与  $O-xy$ 坐标系下  $r = 100m$ 圆周处,极角 分别为  $0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ$  处的压降解析解比较(图 4),同时将油藏等势线的数值计算结果与解析结果进行对比(图 5)。

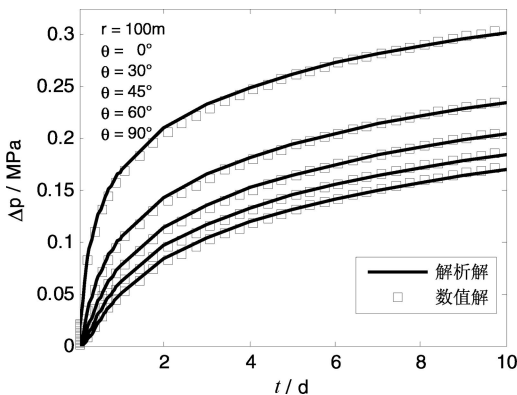


图 4 各向异性地层中不同位置压降比较示意图

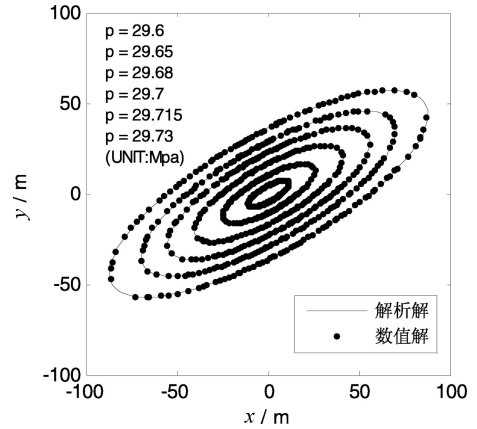


图 5 各向异性油藏压力等值线分布图

由图 4可见,各向异性油藏中各点的压力变化规律与各向同性油藏的规律基本一致。在与井点等距的圆周上,压力变化却不尽相同:越小,压降幅度越大,增加越快,当  $\theta = 0$  时达到极大值;反之,当  $\theta = 90$  时,压降幅度最小,达到极小值,即在两个渗透率主轴方向分别达到极值。由图 5可见,在各向异性油藏中,等势线呈椭圆分布,椭圆的长轴和短轴方向与渗透率主轴平行,椭圆的长短轴之比受渗透率主值的比值  $K_x / K_y$ 影响,  $K_x / K_y$ 越大,则等势线椭圆越扁,在长轴方向,压力梯度达到最小。对比分析图 4和图 5,各向异性渗流问题的有限元法求解结果与解析结果相当接近,因此验证了本方法的正确性;此外,各向异性油藏中的压力分布不仅取决于生产动态,还受储层各向异性的影响。

### 4 结论

本文给出了完全各向异性油藏弹性不稳定渗流问题的有限元法数值求解过程,针对典型的均质各向同性和均质各向异性渗流问题进行了模拟计算,得到油藏内压力动态分布曲线。通过对有限元法数值计算结果与精确解进行对比表明,有限元法计算精度很高,既可以处理正交各向异性渗流问题,同时适用于求解利用全张量形式渗透率表征的完全各向异性油藏的渗流问题。研究结果为各向异性油藏的开发和精细油藏数值模拟提供了理论依据。

### 参考文献:

[1] 陈月明. 油藏数值模拟基础 [M]. 北京:石油工业出版社, 1989.  
 [2] 韩大匡, 陈钦雷, 闫存章. 油藏数值模拟基础 [M]. 北京:石油工业出版社, 1993.  
 [3] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京:清华大学出

- 版社, 2003.
- [4] Javandel I, Witherspoon P A. Application of the finite element method to transient flow in porous media[J]. SPE Journal, 1968, 8(3): 241-252
- [5] McMichael C L, Thomas G W. Reservoir simulation by galerkin's method [J]. SPE Journal, 1973, 13(3): 125-138
- [6] Dalen, Vilgeir Simplified finite-element models for reservoir flow problems[J]. SPE Journal, 1979, 19(5): 333-343.
- [7] Forsyth, Peter A. A Control-volume finite-element method for local mesh refinement in thermal reservoir simulation[J]. SPE Reservoir Engineering, 1990, 5(4): 561-566
- [8] Morita, Nobuo Transient finite element code: a versatile tool for well performance analyses[A]. Low Permeability Reservoirs Symposium. Colorado [C]. Denver: Society of Petroleum Engineers, Inc, 1993. 26-28
- [9] 袁益让, 王文洽. 关于油水两相渗流平面弹性驱动问题的有限元方法 [J]. 石油学报, 1980, 1(4): 65-76
- [10] 周竹眉, 郎兆新. 水平井油藏数值模拟的有限元方法 [J]. 水动力学研究与进展 (A 辑), 1996, 11(3): 261-271.
- [11] 蒋廷学, 郎兆新, 单文文, 等. 低渗透油藏压裂井动态预测的有限元方法 [J]. 石油学报, 2002, 23(5): 53-58
- [12] 吕秀凤, 刘振宇, 赵秋丽. 多区非均质油藏的有限元法理论分析 [J]. 水动力学研究与进展, 2005, 20(5): 571-576
- [13] 董平川, 牛彦良, 李莉. 各向异性油藏渗流的有限元数值模拟 [J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(A1): 2633-2640.
- [14] Jacob Bear Dynamics of fluids in porous media [M]. New York: Courier Dover Publications, 1988
- [15] 葛家理. 现代油藏渗流力学原理 [M]. 北京: 北京石油工业出版社, 2003.
- [16] Streltsova T D. Well testing in heterogeneous formations[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1988
- [17] Fanchi J R. Directional Permeability[J]. SPE Reservoir Evaluation & Engineering, 2008, 11(3): 565-568