

文章编号: 1673-5005 (2007) 02-0095-05

油藏渗流问题的无网格法分析

李玉坤¹, 姚 军², 黄朝琴¹, 张喜君³

(1. 中国石油大学 储运与建筑工程学院, 山东 东营 257061; 2 中国石油大学 石油工程学院, 山东 东营 257061;
3 中国石油 秦皇岛华奥销售公司, 河北 秦皇岛 066100)

摘要: 无网格法作为一种新型的数值方法, 因其近似函数不依赖于网格而受到广泛关注。基于无网格法对油藏渗流问题的求解进行了研究。对无网格法的基本原理进行了详细的阐述; 并针对油藏单相渗流问题推导了无网格法计算格式, 通过实例计算验证了该方法的有效性。

关键词: 无网格法; 油藏渗流; 移动最小二乘法; 影响域

中图分类号: O 31 **文献标识码:** A

Analysis of fluid flow problem in reservoir by meshless method

LI Yu-kun¹, YAO Jun², HUANG Zhao-qin¹, ZHANG Xi-jun³

(1. College of Transport & Storage and Civil Engineering in China University of Petroleum, Dongying 257061, Shandong Province, China;
2. College of Petroleum Engineering in China University of Petroleum, Dongying 257061, Shandong Province, China;
3. Qinhuangdao Huao Marketing Company, PetroChina, Qinhuangdao 066100, Hebei Province, China)

Abstract: Meshless method is an efficient new-style numerical method. The extensive study of the theory and applications of meshless method was done because of the approximate function without any mesh. The meshless method was applied to the problems of single phase flow through porous media in reservoir. The fundamental theory of meshless method was explicitly described. Then the particular meshless calculating formulas were deduced. The numerical simulation results are satisfying. The case verified the validity.

Key words: meshless method; fluid flow in reservoir; moving least-square method; influence domain

目前在解决油藏渗流问题时,有限差分法和有限单元法^[1-4]为主要的数值计算方法,这些方法都是基于网格的,其计算结果受网格的影响较大,同时这些方法的前后处理比较麻烦。因此近年来兴起的无网格法^[5-6],因其不需要划分网格而受到了广泛关注。对无网格法的研究最早是对非规则网格有限差分法的研究^[7-9],这种方法建立在移动最小二乘法(moving least-square, MLS)、核函数法(kernel function, KF)和单位分解法(partition of unity, PU)等基础之上。最早的是光滑质点流体动力学(smoothed particle hydro-dynamics, SPH)方法,并且成功地应用于天体物理领域^[10]。Nayroles等人^[11]将MLS引

入Galerkin法中,提出了漫射元法(diffuse element method, DEM)。Belytschko改进了DEM方法^[12],并把新方法命名为无网格伽辽金方法(element-free Galerkin Method, EFGM),但该方法仍然需要背景积分网格。曾清红等人^[13]应用无网格伽辽金法对单相稳定渗流问题进行了研究。现有的无网格法大多是采用移动最小二乘法来构造近似函数,该方法首先在求解域内进行布点(可以是规则的也可以是随机的),然后基于移动最小二乘法建立近似拟合函数。由此建立高阶连续可导的近似函数,因此具有精度高、后处理简单等优点,这类无网格法已在很多领域得到了应用^[14-15]。然而,关于无网格法在

收稿日期: 2006-10-08

基金项目: 国家重点基础研究发展计划项目(2006CB202404)

作者简介: 李玉坤(1973-),男(汉族),山东新泰人,博士研究生,主要从事油气田工程力学方面的研究工作。

油藏渗流问题中的研究,无论是理论还是应用都非常少。因此,笔者基于最小二乘无网格法(该方法完全脱离了网格)对油藏渗流问题进行研究,从模型的建立、求解以及应用等方面进行探讨。

1 无网格法

加权残量法可作为无网格法的理论基础,本文中应用MLS方法构造近似函数或称为试探函数,通过最小二乘法来离散方程,建立了相应的无网格法,即最小二乘无网格法(meshless weighted least square method, MWLS)。

1.1 移动最小二乘法(MLS)

设在求解域内有场函数 $u(x)$ 以及一组随机分布的离散节点 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 用 Ω_i 表示节点 x_i 的影响域,在二维问题中,影响域常取为圆形或矩形。使用MLS法进行全局近似,对任意的 x 有

$$u^h(x, \bar{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\bar{x}) a_i(x) = p^T(\bar{x}) a(x) \quad (1)$$

式中, $\bar{x} = [x, y, z]^T$ 为计算点 x 的邻域 Ω_i 内各点的空间坐标; $u^h(x, \bar{x})$ 或 $u^h(x)$ 为函数 $u(\bar{x})$ 的近似表达式; $p_i(\bar{x})$ 为基函数; m 为基函数的项数; $a_i(x)$ 为相应的系数。

对于二维问题常用的是线性基和平方基。

线性基: $p^T(\bar{x}) = [1, x, y], m = 3;$

二次基: $p^T(\bar{x}) = [1, x, y, xy, x^2, y^2], m = 6。$

系数 $a(x)$ 的选取使得近似函数 $u^h(x, \bar{x})$ 在计算点 x 的邻域 Ω_i 内是待求函数 $u(x)$ 在某种最小二乘意义下的最佳近似。

设计算点 x 的邻域 Ω_i 包括 n 个节点,近似函数在 $\bar{x} = x_i$ 误差的加权平方和为

$$J = \sum_{i=1}^n w_i(x) [u^h(x, x_i) - u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n w_i(x) \left[\sum_{j=1}^m p_j(x_i) a_j(x) - u_i \right]^2 \quad (2)$$

式中, $w_i(x)$ 为权函数。

为了求得系数 $a(x)$,令 $J(x)$ 取最小值,可得

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u \quad (3)$$

其中,矩阵 A, B 如下:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i),$$

$$B(x) = [w_1(x) p(x_1) \quad w_2(x) p(x_2) \quad \dots \quad w_n(x) p(x_n)]$$

将式(3)代入式(1)中得

$$u^h(x, \bar{x}) = N(x, \bar{x}) u = N_i u_i \quad (4)$$

其中,形函数 $N(x, \bar{x}) = p^T(\bar{x}) A^{-1}(x) B(x)$ 。

令

$$r = A^{-1} p,$$

并对形函数 $N(x, \bar{x})$ 求导,可得到形函数的一阶和二阶导数为

$$N_{,i}^k = r_{,i}^T B + r^T B_{,i},$$

$$N_{,ij}^k = r_{,ij}^T B + r_{,i}^T B_{,j} + r_{,j}^T B_{,i} + r^T B_{,ij}$$

权函数是MLS近似中的重要组成部分,其选择目前还没有理论上的具体规则,带有某种任意性,本文中采取的是四次样条函数,它是如下 $C^2(\cdot)$ 连续函数式:

$$r(r) = \begin{cases} [\exp(-r^2) - \exp(-1)] / [1 - \exp(-1)] \\ \exp(-r^2), & r \leq 1; \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

其中

$$r = \frac{dI}{dn I} dI = \|x - x_i\|.$$

影响域对计算的精度和计算效率有直接关系,本文中的影响域半径取为 $d_{m_i} = scale \times s[k]$,其中, $s[k]$ 为节点 x_i 与距其最近的第 k 个节点之间的距离, $scale$ 是大于或等于 1 的乘子。

1.2 最小二乘无网格法(MWLS)

最小二乘法可以用来求解具有任何类型偏微分方程的问题,从变分原理和加权残量法上讲这类方法是来建立泛函的,并且其权函数或称为检验函数就是残量本身。首先令 $\delta \int_{\Omega} R^2 d\Omega = 0$,再取最小值,即

$$\delta \int_{\Omega} (R) R d\Omega = 0$$

对具体问题采用上述基于MLS方法的近似函数,并采用上述积分格式的离散点求和形式便得到了最小二乘无网格法,关于该方法的详细阐述可参考文献[16]。

2 MWLS在单相流体渗流中的应用

2.1 MWLS计算格式推导

对于均质各向同性油藏地层,单相流体不稳定渗流的微分方程和定解条件如下:

$$\begin{cases} \nabla^2 P(x) = \frac{1}{\mu C_f} \frac{\partial P(x)}{\partial t}, & \text{在 } \Omega \text{ 域内;} \\ P = \bar{P}, & \text{在 } \Gamma_p \text{ 边界上;} \\ n \cdot \nabla P = \bar{q}, & \text{在 } \Gamma_q \text{ 边界上;} \\ P|_{t=0} = P_r \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$k = k / (\mu C_f).$$

式中, p_p 和 p_q 分别为压力边界和流量边界; n 为边界 p_q 的外法线单位矢量; \bar{P} 为边界 p_p 上给定的压力; \bar{q} 为流体离开油藏区域的流速值 (沿 n 方向); α 为导压系数; k 为渗透率; μ 为流体的粘度; C_f 为油藏地层综合导压系数; ϕ 为孔隙度。

最小二乘无网格法要求方程 (5) 残量的加权平方和为

$$= \int_{p_p} \alpha_1 (P^h - \bar{P}) (P^h - \bar{P}) dl + \int_{p_q} \alpha_2 (n \cdot \nabla P^h - \bar{q}) (n \cdot \nabla P^h - \bar{q}) dl + \int \left[\nabla^2 P^h - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P^h}{\partial t} \right] \left[\nabla^2 P^h - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P^h}{\partial t} \right] d \quad (6)$$

把无网格近似函数式 (4) 代入式 (6), 并取最小值, 可得

$$= P^T \nabla^2 N^T \left[\nabla^2 N P - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial t} \right] d + \int_{p_p} P^T N^T (N P - \bar{P}) dl + \int_{p_q} P^T n \cdot \nabla N^T (n \cdot \nabla N P - \bar{q}) dl \quad (7)$$

式中, α_1, α_2 为罚函数, 用来施加边界条件。

为了避免积分, 采用下式作为式 (7) 的离散形式

$$= P^T \sum_{s=1}^n \nabla^2 N^T(x_s) \left[\nabla^2 N(x_s) P - \frac{1}{\alpha} N \frac{\partial P}{\partial t} \right] + \int_{p_p} P^T \sum_{s=1}^{n_1} N^T(x_s) (N(x_s) P - \bar{P}) + \int_{p_q} P^T \sum_{s=1}^{n_2} n \cdot \nabla N^T(x_s) (n \cdot \nabla N(x_s) P - \bar{q}) \quad (8)$$

将式 (8) 写成矩阵形式, 并考虑到 P^T 的任意性, 有

$$[K_t] \{P\} + [K_s] \{P\} = \{f\}, \quad (9)$$

其中

$$[K_s] = - \sum_{s=1}^n \frac{1}{\alpha} \nabla^2 N^T(x_s) N(x_s),$$

$$\{P\} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n]^T,$$

$$\{P\} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n]^T, \quad P' = \frac{\partial P}{\partial t},$$

$$f = \int_{p_p} \sum_{s=1}^{n_1} N^T(x_s) \bar{P} + \int_{p_q} \sum_{s=1}^{n_2} n \cdot \nabla N^T(x_s) \bar{q}$$

$$[K_t] = \sum_{s=1}^n \nabla^2 N^T(x_s) \nabla^2 N(x_s) + \int_{p_p} \sum_{s=1}^{n_1} N^T(x_s) N(x_s) + \int_{p_q} \sum_{s=1}^{n_2} n \cdot \nabla N^T(x_s) n \cdot \nabla N^T(x_s).$$

为了保证式 (9) 中各项的数量级相当, 罚函数可取为 $\alpha_2 = 10^5, \alpha_1 = \alpha_2 K^2$ 。

对于稳态问题, 方程为 $[K_s] \{P\} = \{f\}$ 。

对于瞬态问题还需进一步求得时间差分的递推公式, 本文中采用向后差分, 格式如下:

$$\left[[K_s] + \frac{1}{\Delta t} [K_t] \right] \{P(t_{n+1})\} = \{f(t_{n+1})\} + \frac{1}{\Delta t} [K_t] \{P(t_n)\} \quad (10)$$

式 (10) 即为瞬态问题的计算格式。

2.2 稳态渗流问题算例

图 1 为圆形油藏示意图。 $r_w = 10 \text{ cm}, r_e = 50 \text{ cm}$, 渗透率 $k = 1$, 边界条件为 $P|_w = P_w = 5 \text{ MPa}, P|_e = P_e = 10 \text{ MPa}$ 。

利用对称性, 取 1/4 部分研究, 边界条件是内外半径处压力已知, 在两侧为封闭边界, 并划分 25 个节点, 沿径向布点间距分别为 5, 8, 12, 15 cm, 沿环向按 22.5 均分, 如图 2 所示。

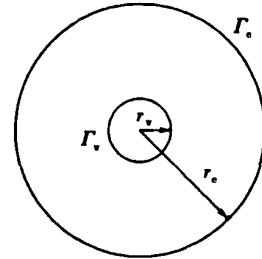


图 1 圆形油藏

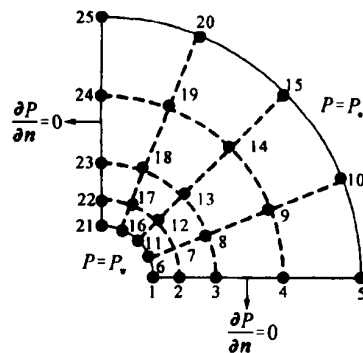


图 2 1/4 部分及其布点

在用 MWLS 法计算压力分布和流体流出内壁的流量时, 取 $\alpha = 2.0, d_{wi} = 0.28 \text{ cm}$ 。图 3 和图 4 分别为用本文方法求得的径向压力、径向压力梯度结果与有限元 (FEM) 分析结果以及精确解 (Exact) 的对比。有限元计算网格为图 2 中的等参单元网格。

压力误差范数: MWLS 法为 0.521%, FEM 法为

0.248% ; 压力梯度误差范数 : MWLS法为 3.71% , FEM法为 5.28%。

误差范数定义如下 :

$$L_r = \left[\frac{\sum_{i=1}^n [T^h(x_i) - T(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^n T^2(x_i)} \right]$$

式中, $T^h(x_i)$ 为点 x_i 处的近似值 ; $T(x_i)$ 为点 x_i 处的真实值。

本算例精确解为

$$P = \frac{1}{\ln \left(\frac{k_e}{k_w} \right)} \left(P_w \frac{k_e}{r} + P_e \frac{r}{k_w} \right),$$

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\ln \left(\frac{k_e}{k_w} \right)} \left(\frac{P_e - P_w}{r} \right).$$

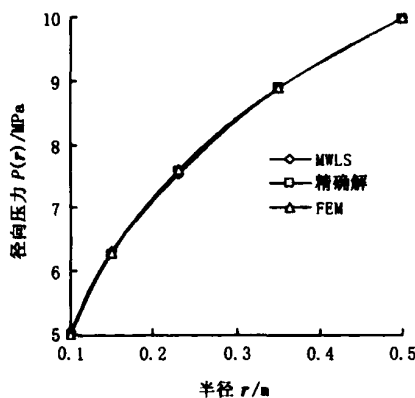


图3 径向压力分布对比

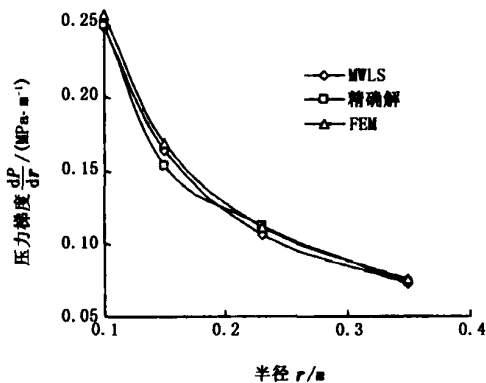


图4 径向压力梯度对比

2.3 瞬态渗流问题

图 5 为平面矩形油藏地层示意图。油藏地层长 1 m, 宽 1 m, 厚度为 0.1 m, 油藏地层导压系数 $\beta = 0.043 \text{ m}^2/\text{h}$ 。

初始条件 : $P \Big|_{t=0} = 400x(1-x)$,

边界条件 : $P \Big|_{x=0} = P \Big|_{x=1} = 0$

采用均匀规则布点, 如图 6 所示。应用 MWLS 方法进行求解。其中, 权函数参数 $\omega = 2.0$, $d_{n1} = 3.7 \times 10^{-4}$, 时间步长 $\Delta t = 0.4 \text{ h}$ 。本文中求解了 $[0, 2.4]$ 时间区间上各时刻的压力分布。

图 7 为各时刻沿 x 方向的压力变化曲线。将 MWLS 计算结果、有限元计算结果 (有限元计算网格如图 8 所示) 的计算误差进行了比较, 如图 9 所示。

本算例精确解如下

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{800}{(n\pi)^3} [n \sin(n\pi x) + 2 \cos(n\pi x) - 2] \exp[-(n\pi a)^2 t] \sin(n\pi x).$$

其中, $a^2 = \beta$ 。

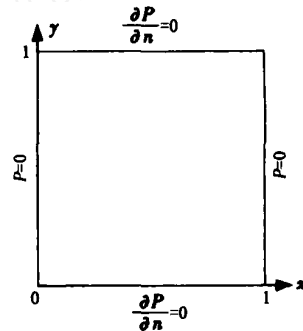


图5 平面矩形油藏地层

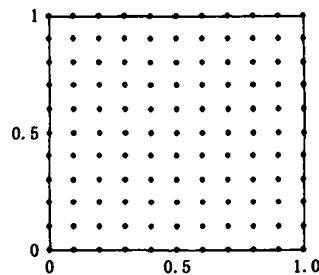


图6 平面矩形油藏节点布置

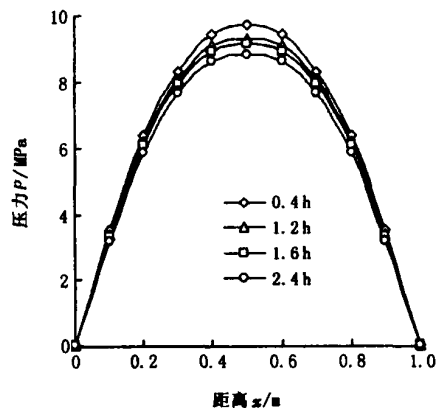


图7 各时刻沿 x 方向的压力变化曲线

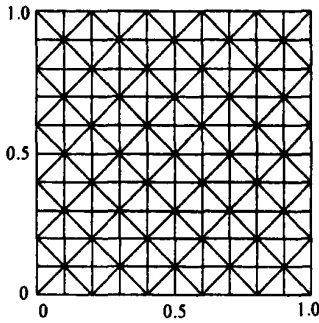


图 8 有限元计算网格

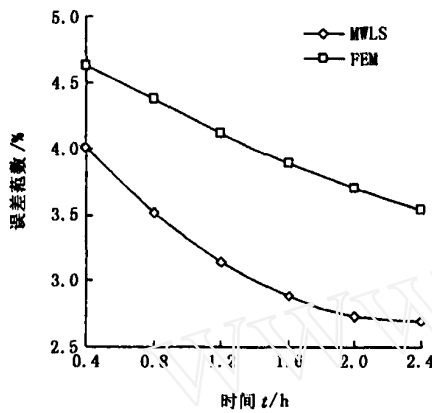


图 9 MWLS 和 FEM 计算误差范数对比

2.4 结果分析

通过上述算例,可知在无网格法的计算中完全脱离了网格,其前处理工作,相对于有限元法和有限差分简单了许多。最小二乘无网格法虽然是采用积分的离散点形式,但其计算精度较高,与有限元相当,在压力梯度的求解中其精度还高于有限元法,这是由于无网格法计算结果具有光滑连续性。在计算中发现权函数和节点影响域的选取对计算精度有着直接的影响,只能经验取值,建议取 $\alpha = 2.0$,节点影响域内包含 18 ~ 26 个节点。

3 结 论

(1) 无网格法数据结构简单,只需节点信息,完全脱离了网格,边界条件处理简单且易于实现。

(2) 计算精度高,且具有高阶连续性。

(3) 无网格法计算程序的稳定性以及计算结果的精度过分依赖于权函数和影响域半径的选取,并且近似函数构造中涉及到大量的矩阵求逆,因此计算量较大,一般是有限元的 3 ~ 10 倍,这些都有待于完善。

(4) 无网格法应用于油藏工程中才刚刚起步,在严格的数学论证、计算效率和大量应用实例方面都还不能与成熟的有限差分法、有限元法媲美,但其

显著的优点使其具有重要的研究和应用价值。

参考文献:

[1] 陈月明. 油藏数值模拟基础 [M]. 山东东营: 石油大学出版社, 1989: 25-38

[2] 郭永存, 卢德唐, 马凌霄. 低渗透油藏渗流的差分法数值模拟 [J]. 水动力学研究与进展 (A 辑), 2004, 19 (3): 288-293
GUO Yong-cun, LU De-tang, MA Ling-xiao Numerical simulation of fluid flow in low permeability reservoir using finite difference method [J]. Journal of Hydrodynamics (Ser A), 2004, 19 (3): 288-293

[3] ANANT R, KUKRETI, YATENDRA Rajapaksa A numerical model for simulating two-phase flow through porous media [J]. Applied Mathematical Modelling, 1989, 13 (5): 268-281.

[4] 程林松, 郎兆新. 水平井油——水两相渗流的有限元法 [J]. 水动力学研究与进展 (A 辑), 1995, 10 (3): 309-315.
CHENGL in-song, LANG Zhao-xin A finite element representation of two-phase fluid flow through porous medium with horizontal well [J]. Journal of Hydrodynamics (Ser A), 1995, 10 (3): 309-315.

[5] BELYTSCHKO T, KRONGAUZ Y, ORGAN D, et al Meshless methods: an overview and recent developments [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, 139: 43-47.

[6] 庞作会, 葛修润, 郑宏, 等. 一种新的数值方法无网格伽辽金法 (EFGM) [J]. 计算力学学报, 1999, 16 (3): 320-329.
PANG Zuo-hui, GE Xiu-run, ZHENG Hong, et al A new numerical method element-free galerkin method (EFGM) [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 16 (3): 320-329.

[7] LISZKA T Finite difference method for arbitrary irregular meshes in nonlinear problems of applied mechanics [M]. J Orkisz- SMIRt San Francisco, 1977.

[8] LUO Y, HAUSSLER-Combe U. A generalized finite difference method based on minimizing global residual [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2002, 191: 1421-1438.

[9] PERRONE N, KAO R. A general finite difference method for arbitrary meshes [J]. Comput Struct, 1975, 5: 45-58

[10] GNOLGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and applications to non-spherical stars [J]. Mon Not Roy Astron Soc, 1977, 18: 375-389.

(下转第 104 页)

merical simulation on alternating current field measurement and sensitivity analysis of detected signal[J]. Journal of the University of Petroleum, China (Edition of Natural Science), 2004, 28 (3): 65-68

[2] DAV D T. Operational experience with the ACMF inspection technique for subsea weld inspection [J]. Environmental Engineering, 1994, 7 (1): 9-13

[3] ZHOU Jian-wei, MARTN C Lugg, ROY Collins A non-uniform model for alternating current field measurement of fatigue cracks in metals [J]. Applied Electromagnetics and Mechanics, 1999, 10: 221-235.

[4] DAR USH Mirshekar-syahkal 1-D probe array for ACMF inspection of large metal plates [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002, 51 (2): 374-382

[5] REZA F, MOSTAFAVI, M RSHEKAR-Syahkal D. Simple electromagnetic detection of variations in properties of metal surfaces [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1997, 33 (4): 2492-2494.

[6] 唐兴伦, 范群波, 张朝晖, 等. ANSYS工程应用教程: 热与电磁学篇 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 2003.

[7] CHEN K, BRENNAN F P. A theoretical and experimental study of alternating current stress measurement under different loading modes [J]. Journal of Strain Analysis, 1998, 33 (4): 291-303.

[8] M RSHEKAR-Syahkal D, MOSTAFAVI R F. Effects of probe and inducer on saturation of crack signal in high-sensitivity AC field measurement technique [J]. IEE Proc-sei Meas Technol, 2001, 148 (8): 193-196

[9] ALAN Raine, MARTN Lugg A review of the alternating current field measurement inspection technique [J]. Sensor Review, 1999, 19 (3): 207-213.

[10] SALBIM IA H, SADEGH I S H H, MO N I R. Thin-skin analysis technique for interaction of arbitrary-shape inducer field with long cracks in ferromagnetic metals [J]. NDT&E International, 2004 (37): 471-479.

(编辑 沈玉英)

(上接第 94 页)

[6] 朱坚亭, 许元泽. 非牛顿流体流经波纹管流动的阻力特性 [J]. 力学学报, 1990, 22 (5): 619-624.

ZHU Jian-ting, XU Yuan-ze. Flow resistance of acarreau fluid through corrugated tube [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1990, 22 (5): 619-624.

[7] PAYATAKES Alkiviades C, TIEN Chi, TURIAN Raffi M. Numerical solution of stead state incompressible Newtonian flow through constricted tubes [J]. AICHE J, 1973, 19 (1): 67-77.

[8] PLITSIS Stergios, BERIS Antony N. Calculations of steady-state viscoelastic flow in an undulating tube [J]. J Non-Newton Fluid Mech, 1989, 31: 231-287.

[9] 陈文芳. 非牛顿流体力学 [M]. 北京: 科学出版社, 1984: 94-110.

[10] 陈文芳. 非牛顿流体的一些本构方程 [J]. 力学学报, 1983, 15 (1): 17-26

CHEN Wen-fang. Some constitutive equations for non-Newton fluids [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1983, 15 (1): 17-26.

(编辑 李志芬)

(上接第 99 页)

[11] NA YROLES B, TOUZOT G, VLLON P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements [J]. Comput Mech, 1992, 10: 307-318

[12] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free galerkin methods [J]. Int J Num Meth Engrg, 1994, 37: 229-256

[13] 曾清红, 卢德唐. 含有启动压力梯度的渗流问题及其无网格解法 [J]. 计算力学学报, 2005, 22 (4): 443-446

ZENG Qing-hong, LU De-tang. Porous flow related to start-up pressure gradients and it's solution with meshless methods [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2005, 22 (4): 443-446

[14] 张雄, 刘岩. 无网格法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 1-94.

[15] LU Yan, ZHANG Xiong, LU Ming-wan. Meshless least-squares method for solving the steady-state heat conduction equation [J]. Tsinghua Science and Technology, 2005, 10 (1): 61-66

[16] 晁恒木, 全兴华. 工程有限单元法 [M]. 东营: 石油大学出版社, 2003: 20-23.

(编辑 沈玉英)